PRUEBA E.V. EUCLÍDEOS

1. Consideremos el espacio vectorial euclídeo $\mathcal{P}_3$ con el producto escalar definido por:

$$\langle p(x), q(x)\rangle = aa' + bb' + 2cc' - ac' - ca' + dd'$$

siendo:

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad \text{y} \qquad q(x) = a'x^3 + b'x^2 + c'x + d'$$

- Hallar la matriz de Gram respecto de la base canónica de $\mathcal{P}_3$

$$B_C = \left\{p_1(x) = x^3, p_2(x) = x^2, p_3(x) = x, p_4(x) = 1\right\}$$

- Demostrar que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3$. Hallar una base B de S y la dimensión de S, siendo

$$S = \left\{p(x) \in \mathcal{P}_3 / \int_{-1}^{1} p(x)dx = 0 \wedge p''(0) = 0\right\}$$

- Hallar una base ortogonal B_O de S, con el producto escalar del enunciado.
- Comprobar que $p(x) = x^2 \notin S$. Hallar la mejor aproximación de $p(x) = x^2$ en S. ¿Cuál es la norma del error cometido?
- Prolongar la base B_O de S hasta obtener una base B^* de $\mathcal{P}_3$. Razonar la respuesta.

2. Consideremos en $\mathbb{R}^4$ el producto escalar definido del modo siguiente:

$$\langle \overline{x}, \overline{y}\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_4$$

- Hallar la matriz de Gram respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$.
- Demostrar que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$. Hallar una base B de S y la dimensión de S, siendo

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 + x_4 = x_2 \text{ , } x_2 + x_3 = 0\}$$

- Hallar una base ortogonal B_O de S, con el producto escalar del enunciado.
- Hallar la mejor aproximación del vector $\overline{x} = (1, 1, -1, 0)$ en S. ¿Cuál es el vector $\overline{v}$ de S que cumple

$$\min_{\overline{u}\in S} \mathrm{d}\left((1, 1, 1, -1), \overline{u}\right) = \mathrm{d}\left((1, 1, 1, -1), \overline{v}\right)?$$

  Justifica las respuestas.
- Prolongar la base B de S hasta obtener una base B^* de $\mathbb{R}^4$. Razonar la respuesta.

3. Sea el espacio vectorial $\mathcal{C}_{[0,1]}$ y el producto escalar $<\ ,\ >$ sobre dicho espacio vectorial definido por :

$$< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx \quad \forall f, g \in \mathcal{C}_{[0,1]}$$

- Hallar una base ortogonal del subespacio vectorial

$$S = \mathcal{L}\left(\left\{f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2\right\}\right) \subset \mathcal{C}_{[0,1]}$$

  ¿Cuál es la dimensión de S? Justifica las respuestas.
- Hallar la mejor aproximación de la función $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$ en S.

- Determinar la función $r(x)$ definida por

$$r(x) = ax + b \quad \forall x \in [0,1] \quad \big(a, b \in \mathbb{R}\big)$$

que mejor se aproxime a la función $g(x)$ definida por $g(x) = x^3 \quad \forall x \in [0,1]$.

4. En el espacio vectorial euclídeo $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ con el producto escalar usual definido por:

$$\langle A, B \rangle = \text{traza}\, \big(B^T \cdot A\big)$$

se considera el subconjunto:

$$S = \left\{ A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) / A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot A \right\}$$

- Demostrar que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y hallar una base B de S y la dimensión de S.
- Encontrar una base ortogonal de S.
- Hallar la mejor aproximación de $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en S. Calcular la norma del error cometido.
- Prolongar la base B_O hasta obtener una base B^{ast} de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
- Hallar la matriz de Gram del producto escalar usual respecto de la base B^{ast}.

5. Consideremos el siguiente producto escalar en R^4:

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (x_1 + x_3)(y_1 + y_3) + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3) + x_4 y_4 \quad \forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^3$$

- Calcular la matriz de Gram del producto escalar definido previamente respecto de la base canónica.
- Hallar una base y la dimensión del subespacio vectorial S de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 - x_2 = x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$$

- Comprobar que $(1, 1, -1, 0) \perp (0, 0, 1, 1)$.
- Encontrar una base B_O ortogonal de $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar del enunciado.
- ¿Cuál es la mejor aproximación del vector $\overline{v} = (1, 0, 0, 0)$ en S? Justificar la respuesta.

6. En el espacio vectorial euclídeo $(\mathcal{P}_3\, , <\, ,\, >)$ con el producto es calar definido por:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = 2aa' + bb' + 3cc' + ac' + ca' + dd'$$

siendo

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad \text{y} \qquad q(x) = a'x^3 + b'x^2 + c'x + d'$$

Se considera el subconjunto:

$$S = \{p(x) \in \mathcal{P}_3 \,/\, p(0) + p(1) = p'(0) \,\wedge\, p''(0) = 0\}$$

- Demostrar que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3$.
- Hallar una base B de S y la dimensión de S.
- Ampliar la base B de S hasta obtener una base B^* de $\mathcal{P}_3$.
- Hallar un sistema generador G de S que no sea base de S.
- Hallar la matriz de Gram respecto de la base canónica B_C de $\mathcal{P}_3$, siendo:

$$B_C = \big\{e_1(x) = 1, e_2(x) = x, e_3(x) = x^2, e^4(x) = x^3\big\}$$

- Determinar la mejor aproximación del polinomio $p(x) = -1$ en S.

7. Sea el espacio vectorial $\mathcal{C}_{[-1,1]}$ y el producto escalar $< \, , \, >$ sobre dicho espacio vectorial definido por :

$$< f, g > = \int_{-1}^{1} x^2 f(x) g(x) dx \quad \forall f, g \in \mathcal{C}_{[-1,1]}$$

   - Hallar una base ortogonal del subespacio vectorial

$$S = \mathcal{L}\left(\left\{f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^3\right\}\right) \subset \mathcal{C}_{[-1,1]}$$

     ¿Cuál es la dimensión de S? Justifica las respuestas.
   - Demostrar que $B = \left\{f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^3\right\}$ es base de S.
   - Hallar la mejor aproximación de la función $f(x) = x^3$ en S.
   - Hallar la matriz de Gram respecto de la base $B = \left\{f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^3\right\}$.

8. Consideremos el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar definido por:

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = x_1 y_1 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + x_3 y_3 + x_4 y_4$$

   Sea S el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^4$:

$$S = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_4 = 0 \,\wedge\, x_1 + 3x_2 = x_3\right\}$$

   - Calcular la matriz de Gram respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$.
   - Demostrar que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$. Hallar una base B_S de S y la dimensión de S.
   - Hallar un sistema generador G de S que no sea base de S. Hallar un sistema libre F formado por vectores de S que no sea base de S. Razonar las respuestas.
   - Prolongar la base B_S de S hasta conseguir una base B^* de $\mathbb{R}^4$.
   - Hallar una base B_O ortogonal de S.
   - Calcular la mejor aproximación del vector $\overline{v} = (1, 2, 2, 0)$ en S.

9. Consideremos en el espacio vectorial $\mathcal{P}_4$ el producto escalar definido del modo siguiente:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(-2)q(-2) + p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$$

   - Calcular la matriz de Gram en la base canónica de $\mathcal{P}_4$.
   - Hallar una base ortogonal B_O del subespacio vectorial:

$$S = \mathcal{L}\left(\left\{p_1(x) = 1, p_2(x) = x, p_3(x) = x^2\right\}\right)$$

   - Hallar la mejor aproximación del polinomio $p(x) = 5 - \frac{1}{2}x^4$ en S.

10. Consideremos el espacio vectorial euclídeo $\mathcal{C}_{[-2,2]}$ con el producto escalar usual:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-2}^{2} f(x) g(x) dx$$

   - Hallar una base ortogonal B_O del subespacio vectorial:

$$S = \mathcal{L}\left(\left\{p_1(x) = 1, p_2(x) = x, p_3(x) = x^2\right\}\right)$$

   - Hallar la mejor aproximación de la función $f(x) = x^4$ en S.
   - Hallar la mejor aproximación de $f(x) = x^4$ en el subespacio:

$$T = \mathcal{L}\left(\{p_1(x) = 1, p_2(x) = x\}\right)$$