FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS II

Curso 2008–09

BLOQUE 1

1. Consideremos el conjunto

$$S = \left\{ p(x) \in \mathcal{P}_4 / p(0) = 0 \wedge p''(0) = 0 \wedge p'(1) - 4p(1) = 0 \right\} \subset \mathcal{P}_4$$

Demostrar que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_4$. Hallar una base B de S e indicar la dimensión de S.

<u>*Solución*</u>.–

$$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
$$p'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$
$$p''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

$$\left.\begin{array}{rcl} p(0) & = & e \\ p''(0) & = & 2c \\ p'(1) - 4p(1) & = & 4a + 3b + 2c + d - 4a - 4b - 4c - 4d - 4e \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} e & = & 0 \\ c & = & 0 \\ -b - 2c - 3d - 4e & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} e & = & 0 \\ c & = & 0 \\ b & = & -3d \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcl} S & = & \left\{ ax^4 - 3dx^3 + dx / a, d \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ ax^4 + d(x - 3x^3) / a, d \in \mathbb{R} \right\} = \\ & = & \mathcal{L}\left(\left\{ p_1(x) = x^4, p_2(x) = x - 3x^3 \right\} \right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bullet \ \boxed{S \text{ s.v. de } \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})} \\ \bullet \ B = \{p_1(x), p_2(x)\} \text{ s.g. de } S \end{array} \right. \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} p_1(x) \neq \alpha p_2(x) \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad B \text{ s. libre} \\ B = \{p_1(x), p_2(x)\} \text{ s.g. de } S \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{B \text{ base de } S \wedge \dim S = 2}$$

2. Consideremos el subespacio vectorial S de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$S = \mathcal{L}\left(\{ \overline{u}_1 = (2, 5, 0, -3, -3), \overline{u}_2 = (0, -1, 0, 1, 1), \overline{u}_3 = (1, 1, 0, 0, 0) \} \right)$$

Hallar un sistema generador G de S que no sea base de S. Justificar la respuesta.

Hallar un sistema libre F de S que no sea base de S. Justificar la respuesta.

<u>*Solución*</u>.–

Sea A la matriz cuyas filas son los vectores (polinomios) del sistema generador G de S que nos proporciona el enunciado. Se tiene entonces que:

$$\mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,(G) = \dim \mathcal{L}(G) = \dim S$$

Para calcular el rango de A utilizaremos operaciones elementales de fila:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_3 \leftrightarrow F_1}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \overset{F_3 - 2F_1}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \overset{F_3 + 3F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta el comentario realizado previamente, se tiene que: $\dim S = 2$. Por lo tanto un sistema generador de S que no es base de S puede ser:

$$\boxed{G = \{\overline{u}_1 = (2,5,0,-3,-3), \overline{u}_2 = (0,-1,0,1,1), \overline{u}_3 = (1,1,0,0,0)\}}$$

pues se trata de un sistema generador de S y no puede ser base de S pues contiene 3 vectores y todas las bases de S han de contener dos vectores.

Un sistema libre de S que no sea base de S puede ser:

$$\boxed{F = \{\overline{u}_1 = (2,5,0,-3,-3)\}}$$

Se trata de un sistema libre de S pues es un conjunto formado por un único vector (polinomio) no nulo de S y no puede ser base de S pues contiene un único vector y todas las bases de S han de contener dos vectores.

3. Sea

$$B = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

una base de cierto subespacio vectorial S de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Prolongar B hasta conseguir una base B^* de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Justificar la respuesta.

<u>*Solución*</u>.–

Sea A^* la matriz cuyas filas son los vectores del conjunto B^*, siendo

$$\boxed{B^* = \left\{ A_1, A_2, A_3, E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

Sabemos que entonces se cumple que $\mathrm{r}\ (A^*) = \mathrm{r}\ (B^*)$.

Para calcular el rango de la matriz A^* vamos a comprobar que su determinante es no nulo. Desarrollando por las filas que hemos añadido:

$$\det A^* = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} \det A^* \neq 0 \implies \mathrm{r}\ (A^*) = \mathrm{r}\ (B^*) = 6 = \operatorname{card} B^* \implies B^* \text{ s. libre} \\ \dim \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) = 6 = \operatorname{card} B^* \end{array} \right\} \implies B^* \text{ base de } \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

4. Consideremos el espacio vectorial euclídeo $\left(\mathbb{R}^4, \langle\ ,\ \rangle\right)$ con el producto escalar definido por:

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_4y_4$$
$$\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4), \overline{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$$

Hallar una base ortonormal del subespacio vectorial S de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$S = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1 = (1,0,0,0), \overline{u}_2 = (1,1,1,0), \overline{u}_3 = (0,1,1,1)\}\right)$$

<u>*Solución*</u>.– Comprobaremos en primer lugar que los vectores $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3$ forman un sistema libre. Para ello escribiremos la matriz A cuyas filas son los vectores $\overline{u}_i$. Como se ha mencionado previamente se cumple que:

$$\mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,\left(\{\overline{u}_1 = (1,0,0,0), \overline{u}_2 = (1,1,1,0), \overline{u}_3 = (0,1,1,1)\}\right)$$

de modo que si $\mathrm{r}\,(A) = 3$ entonces los vectores $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3$ forman un sistema libre.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{r}\,(A) = 3$$

Aplicamos el proceso de Gram–Schmidt:

- $\overline{v}_1 \;=\; \overline{u}_1 = \underline{(1,0,0,0) = \overline{v}_1}$

- $\overline{v}_2 \;=\; \overline{u}_2 - \dfrac{\langle \overline{u}_2, \overline{v}_1 \rangle}{\|\overline{v}_1\|^2} \cdot \overline{v}_1 \overset{\langle \overline{u}_2,\overline{v}_1\rangle=0\ ;\ \|\overline{v}_1\|^2=1}{\overset{\downarrow}{=}} \overline{u}_2 = \underline{(1,1,1,0) = \overline{v}_2}$

- $\overline{v}_3 \;=\; \overline{u}_3 - \dfrac{\langle \overline{u}_3, \overline{v}_1 \rangle}{\|\overline{v}_1\|^2} \cdot \overline{v}_1 - \dfrac{\langle \overline{u}_3, \overline{v}_2 \rangle}{\|\overline{v}_2\|^2} \cdot \overline{v}_2 \overset{\substack{\langle \overline{u}_3,\overline{v}_1\rangle=-1\ ;\ \|\overline{v}_1\|^2=1 \\ \langle \overline{u}_3,\overline{v}_2\rangle=3\ ;\ \|\overline{v}_2\|^2=3}}{\overset{\downarrow}{=}} \overline{u}_3 + \overline{v}_1 - \overline{v}_2 =$
  $= \underline{(0,0,0,1) = \overline{v}_3}$

Normalizamos los vectores $\overline{v}_i$:

- $\overline{w}_1 = \dfrac{\overline{v}_1}{\|\overline{v}_1\|} \overset{\|\overline{v}_1\|^2=1}{\overset{\downarrow}{=}} \underline{(1,0,0,0) = \overline{w}_1}$

- $\overline{w}_2 = \dfrac{\overline{v}_2}{\|\overline{v}_2\|} \overset{\|\overline{v}_2\|^2=3}{\overset{\downarrow}{=}} \underline{\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = \overline{w}_2}$

- $\overline{w}_3 = \dfrac{\overline{v}_3}{\|\overline{v}_3\|} \overset{\|\overline{v}_3\|^2=1}{\overset{\downarrow}{=}} \underline{(0,0,0,1) = \overline{w}_3}$

Una base ortonormal B_{ON} de S será la formada por los vectores $\overline{w}_i$. es decir:

$$\boxed{B_{ON} = \left\{\overline{w}_1 = (1,0,0,0), \overline{w}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right), \overline{w}_3 = (0,0,0,1)\right\}}$$

BLOQUE 2

1. En el espacio vectorial euclídeo $(\mathcal{P}_3, \langle\ ,\ \rangle)$ con el producto escalar usual definido por:

$$\langle p(x), q(x)\rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$$
$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, q(x) = a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' \in \mathcal{P}_3$$

consideremos cierto subespacio vectorial S del que sabemos que

$$B = \left\{p_1(x) = x^3 + x, p_2(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2, p_3(x) = -2x^3 + x^2 + 2x + 1\right\}$$

es una base ortogonal de S.

Calcular la mejor aproximación de $p(x) = x^2 + 1$ en S. Justificar la respuesta.

<u>*Solución*</u>.– Como B es una base ortogonal de S para hallar la mejor aproximación, que denotaremos $q(x)$, de $p(x)$ en S haremos:

$$q(x) = \frac{\langle p(x), p_1(x)\rangle}{\|p_1(x)\|^2} \cdot p_1(x) + \frac{\langle p(x), p_2(x)\rangle}{\|p_2(x)\|^2} \cdot p_2(x) + \frac{\langle p(x), p_3(x)\rangle}{\|p_3(x)\|^2} \cdot p_3(x)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\langle p(x), p_1(x)\rangle = 0 \quad ; \quad \langle p(x), p_2(x)\rangle = 4 \quad ; \quad \langle p(x), p_3(x)\rangle = 2$$

$$\|p_1(x)\|^2 = 2 \qquad ; \qquad \|p_2(x)\|^2 = 10 \qquad ; \qquad \|p_3(x)\|^2 = 10$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{4}{10} \cdot p_2(x) + \frac{2}{10} \cdot p_3(x) = \\ &= \frac{2}{5} \cdot (x^3 + 2x^2 - x + 2) + \frac{1}{5} \cdot (-2x^3 + x^2 + 2x + 1) = \\ &= \boxed{x^2 + 1 = q(x)} \end{aligned}$$

2. Clasificar en función de los parámetros reales λ, μ el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 2x_1 + (2\mu + 3)x_2 - \mu x_3 &= -1 \\ x_1 + (\mu + 2)x_2 + x_3 &= 0 \\ \lambda x_2 + (\mu + 2)x_3 &= \lambda \end{aligned}$$

<u>*Solución*</u>.– Vamos a realizar operaciones elementales de fila sobre la matriz ampliada AM del sistema para clasificarlo:

$$AM = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2\mu + 3 & -\mu & -1 \\ 1 & \mu + 2 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & \mu + 2 & \lambda \end{array}\right) \overset{F_2 \leftrightarrow F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & \mu + 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2\mu + 3 & -\mu & -1 \\ 0 & \lambda & \mu + 2 & \lambda \end{array}\right) \overset{F_2 - 2F_1}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \mu + 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\mu - 2 & -1 \\ 0 & \lambda & \mu + 2 & \lambda \end{array}\right) \overset{F_3 + \lambda F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \mu + 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\mu - 2 & -1 \\ 0 & 0 & (\mu + 2)(1 - \lambda) & 0 \end{array}\right)$$

Luego se tiene:

- $\boxed{\lambda \neq 1 \wedge \mu \neq -2 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,(AM) = 3 = \text{nro. incógnitas} \quad \Longrightarrow \quad \text{S.C.D.}}$

- $\lambda = 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{r}\,(A) \leq 2.$ En este caso:

$$AM \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \mu+2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\mu-2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Observando esta matriz resulta evidente que:

- $\boxed{\lambda = 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,(AM) = 2 < 3 = \text{nro. incógnitas} \quad \Longrightarrow \quad \text{S.C.I.}}$

  - $\mu = -2 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{r}\,(A) \leq 2.$ En este caso:

$$AM \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Observando esta matriz resulta evidente que:

  - $\boxed{\mu = -2 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,(AM) = 2 < 3 = \text{nro. incógnitas} \quad \Longrightarrow \quad \text{S.C.I.}}$

3. Consideremos el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Escribir este sistema en forma vectorial.

Resolver este sistema, si es que es compatible, utilizando el método de Gauss.

Solución.– La expresión vectorial de este sistema es:

$$x \cdot (1,1,1,3) + y \cdot (2,1,3,3) + z \cdot (3,0,6,2) + t \cdot (1,1,2,3) = (1,1,2,7)$$

Utilizamos el método de Gauss para la resolución de este sistema:

$$AM = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \underset{\sim}{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \\ F_4-3F_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & 0 & 4 \end{array}\right) \underset{\sim}{\substack{F_3+F_2 \\ F_4-3F_2}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_4 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{\tfrac{1}{2}F_3}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{rcl} x+2y+3z+t & = & 1 \\ -y-3z & = & 0 \\ z & = & 2 \\ t & = & 1 \end{array} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{rcl} x & = & 6 \\ y & = & -6 \\ z & = & 2 \\ t & = & 1 \end{array}}$$

BLOQUE 3

1. Consideremos la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular los valores propios de A indicando su orden o multiplicidad.

Utilizando **exclusivamente** la información anterior razonar si la matriz A es una matriz invertible o no.

¿Cuánto vale $\det A$? Justificar la respuesta.

Solución.– Para calcular los valores propios de la matriz A vamos a hallar su polinomio característico $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{des. } F_4}{\overset{\downarrow}{=}} (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{F_1+F_2+F_3}{\overset{\downarrow}{=}}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4-\lambda & 4-\lambda \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{C_2-C_1 \\ C_3-C_1}}{\overset{\downarrow}{=}} (1-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-1)^2 \cdot (\lambda+1) \cdot (\lambda-4) \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{lcl} \lambda_1 = 1 & ; & k_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 & ; & k_2 = 1 \\ \lambda_3 = 4 & ; & k_3 = 1 \end{array}}$$

Para deducir que la matriz $\boxed{\text{A es invertible}}$ utilizando la información anterior podemos proceder de dos formas distintas:

- $\lambda = 0$ no es valor propio de A, luego por el teorema de la matriz invertible A es regular o invertible.
- $\det(A - \lambda I) = (\lambda-1)^2 \cdot (\lambda+1) \cdot (\lambda-4)$, luego sustituyendo λ por 0, se tiene:

$$\boxed{\det A \overset{p_A(0)=\det A}{\overset{\downarrow}{=}} -4} \Longrightarrow A \text{ es invertible}$$

2. Consideremos la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que el polinomio característico de A es:

$$p_A(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-3)^2(\lambda-5)$$

hallar los subespacios propios de A indicando una base de cada uno de ellos.

<u>*Solución*</u>.–

- $V(-1) = \left\{\overline{x} \in \mathbb{R}^4 / A \cdot \overline{x} = 15 \cdot \overline{x}\right\} = \left\{\overline{x} \in \mathbb{R}^4 / \underbrace{(A+I) \cdot \overline{x} = \overline{0}}_{\text{S.H.C.I.}}\right\} \overset{*}{=}$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ll} \text{INC. PRINCIPALES}: & x_2, x_3, x_4 \\ \text{INC. LIBRE}: & x_1 = a \quad \forall\, a \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 4x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ 4x_4 & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{rcr} 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & -a \\ x_4 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x_1 = x_2 & = & a \\ x_3 & = & -2a \\ x_4 & = & 0 \end{array}\right. \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$$

$$\overset{*}{=} \{(a, a, -2a, 0)/a \in \mathbb{R}\} = \{a \cdot (1, 1, -2, 0)/a \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1 = (1, 1, -2, 0)\}\right) \quad \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Longrightarrow \quad B_1 = \{\overline{u}_1\} \ \text{ s. g. de } \ V(-1) \\ \overline{u}_1 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad B_1 \ \text{ s. libre} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad B_1 = \{\overline{u}_1\} \ \text{ base de } \ V(-1)$$

- $V(3) = \left\{\overline{x} \in \mathbb{R}^4 / A \cdot \overline{x} = 11 \cdot \overline{x}\right\} = \left\{\overline{x} \in \mathbb{R}^4 / \underbrace{(A-3I) \cdot \overline{x} = \overline{0}}_{\text{S.H.C.I.}}\right\} \overset{**}{=}$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} & \downarrow & \downarrow & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ll} \text{INC. PRINCIPALES}: & x_2, x_3 \\ \text{INC. LIBRES}: & x_1 = a\,,\ x_4 = b \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x_1 & = & a \\ x_2 & = & -a \\ x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & b \end{array}\right. \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$$

$$\overset{**}{=} \{(a, -a, 0, b)/a, b \in \mathbb{R}\} = \{a \cdot (1, -1, 0, 0) + b \cdot (0, 0, 0, 1)/a, b \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_2 = (1, -1, 0, 0), \overline{u}_3 = (0, 0, 0$$

$$\left.\begin{array}{r} \Longrightarrow \quad B_2 = \{\overline{u}_2, \overline{u}_3\} \ \text{ s. g. de } \ V(3) \\ \overline{u}_2 \neq \alpha \cdot \overline{u}_3 \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad B_2 \ \text{ s. libre} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad B_2 = \{\overline{u}_2, \overline{u}_3\} \ \text{ base de } \ V(3)$$

- $V(5) = \left\{ \overline{x} \in \mathbb{R}^4 / A \cdot \overline{x} = 0 \cdot \overline{x} \right\} = \left\{ \overline{x} \in \mathbb{R}^4 / \underbrace{(A - 5I) \cdot \overline{x} = \overline{0}}_{\text{S.H.C.I.}} \right\} \overset{***}{=}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{INC. PRINCIPALES}: & x_2, x_3, x_4 \\ \text{INC. LIBRES}: & x_1 = a \quad \forall\, a \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{rcl} -2x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 & = & 0 \\ -2x_4 & = & 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 = x_2 = x_3 & = & a \\ x_4 & = & 0 \end{array} \right. \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$$

$\overset{***}{=} \{(a, a, a, 0)/a, b \in \mathbb{R}\} = \{a \cdot (1, 1, 1, 0)/a \in \mathbb{R}\} =$

$= \mathcal{L}(\{\overline{u}_4 = (1, 1, 1, 0)\}) \quad \Longrightarrow$

$$\left. \begin{array}{rr} \Longrightarrow & B_3 = \{\overline{u}_4\} \text{ s. g. de } V(5) \\ \overline{u}_4 \neq \overline{0} \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow & B_3 \text{ s. libre} \end{array} \right\} \Longrightarrow \quad B_3 = \{\overline{u}_4\} \text{ base de } V(5)$$

La solución del ejercicio es:

- $\boxed{\begin{array}{l} V(-1) = \{(a, a, -2a, 0)/a \in \mathbb{R}\} \\ B_1 = \{\overline{u}_1 = (1, 1, -2, 0)\} \text{ base de } V(-1) \end{array}}$

- $\boxed{\begin{array}{l} V(3) = \{(a, -a, 0, b)/a, b \in \mathbb{R}\} \\ B_2 = \{\overline{u}_2 = (1, -1, 0, 0), \overline{u}_3 = (0, 0, 0, 1)\} \text{ base de } V(3) \end{array}}$

- $\boxed{\begin{array}{l} V(0) = \{(a, a, a, 0)/a \in \mathbb{R}\} \\ B_3 = \{\overline{u}_4 = (1, 1, 1, 0)\} \text{ base de } V(0) \end{array}}$

3. a.– Sea $A \in \mathcal{M}_{4\times4}(\mathbb{R})$ cuyo espectro es:

$$\sigma = \{0, 2\}$$

Además se cumple que:

- $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $B_1 = \{\overline{u}_1 = (0, 1, 0, 1), \overline{u}_2 = (1, 0, 1, 0)\}$ es base de $V(2)$

Demostrar que A es diagonalizable y diagonalizar A.

Solución.– Según los datos del ejercicio:

$$\begin{array}{lllll} \lambda_1 = 2 & ; & k_1 = 2 = d_1 & ; & B_1 = \{0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0)\} \text{ base de } V(2) \\ \lambda_2 = 0 & ; & k_2 = 2 = d_2 & ; & B_2 = \{(0, 1, 0, -1), (-1, 0, 1, 0)\} \text{ base de } V(0) \end{array}$$

Por lo tanto la matriz $\boxed{\text{A es diagonalizable}}$ ya que se cumple que:

- $k_1 + k_2 = 4$
- $k_i = d_i \quad i = 1, 2$

Se cumplirá además que:

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot A \cdot P, \quad \text{siendo } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

b.– Calcular la matriz A del apartado anterior

Solución.– Al ser la matriz cuadrada real A diagonalizable se tiene que:

$$\begin{aligned} A &= P \cdot D \cdot P^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A \end{aligned}$$