# FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS II

**Curso 2007–08**

## BLOQUE 1

1. Consideremos el conjunto

$$S=\left\{X\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})/X\cdot\begin{pmatrix}1&-2\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&-1\end{pmatrix}\cdot X\right\}\subset\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

Demostrar que $S$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Hallar una base $B$ de $S$ e indicar la dimensión de $S$.

<u>*Solución*</u>.–

$$\left.\begin{array}{rcl}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2\\0&-1\end{pmatrix}&=&\begin{pmatrix}a&-2a-b\\c&-2c-d\end{pmatrix}\\[2ex]\begin{pmatrix}1&-2\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}&=&\begin{pmatrix}a-2c&b-2d\\-c&-d\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad\left.\begin{array}{rcl}a&=&a-2c\\-2a-b&=&b-2d\\c&=&-c\\-2c-d&=&-d\end{array}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}c&=&0\\d&=&a+b\end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}S&=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&a+b\end{pmatrix}/a,b\in\mathbb{R}\right\}=\left\{a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}/a,b\in\mathbb{R}\right\}=\\&=\mathcal{L}\left(\left\{A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\right\}\right)\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\bullet\ \boxed{S\ \text{s.v. de}\ \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})}\\\bullet\ B=\{A_1,A_2\}\ \text{ s.g. de }\ S\end{array}\right.\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l}A_1\neq\alpha A_2\quad\forall\,\alpha\in\mathbb{R}\quad\Longrightarrow\quad B\ \text{ s. libre}\\B=\{A_1,A_2\}\ \text{ s.g. de }\ S\end{array}\right\}\Longrightarrow\ \boxed{B\ \text{ base de }\ S\wedge\dim S=2}$$

2. Consideremos el subespacio vectorial $S$ de $\mathcal{P}_5$ definido por:

$S=\mathcal{L}\left(\left\{p_1(x)=x^5+x^3-x^2+1,p_2(x)=2x^5+x^4+x^2,p_3(x)=x^5+2x^4-3x^3+5x^2-3\right\}\right)$

Hallar un sistema generador $G$ de $S$ que no sea base de $S$. Justificar la respuesta.

Hallar un sistema libre $F$ de $S$ que no sea base de $S$. Justificar la respuesta.

<u>*Solución*</u>.–

Sea $A$ la matriz cuyas filas son los vectores (polinomios) del sistema generador $G$ de $S$ que nos proporciona el enunciado. Se tiene entonces que:

$$\mathrm{r}\,(A)=\mathrm{r}\,(G)=\dim\mathcal{L}(G)=\dim S$$

Para calcular el rango de $A$ utilizaremos operaciones elementales de fila:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \overset{\substack{F_2-2F_1 \\ F_3-F_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 6 & 0 & -4 \end{pmatrix} \overset{F_3-2F_2}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta el comentario realizado previamente, se tiene que: $\dim S = 2$. Por lo tanto un sistema generador de $S$ que no es base de $S$ puede ser:

$$\boxed{G = \left\{p_1(x) = x^5 + x^3 - x^2 + 1, p_2(x) = 2x^5 + x^4 + x^2, p_3(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3\right\}}$$

pues se trata de un sistema generador de $S$ y no puede ser base de $S$ pues contiene 3 vectores y todas las bases de $S$ han de contener dos vectores.

Un sistema libre de $S$ que no sea base de $S$ puede ser:

$$\boxed{F = \left\{p_1(x) = x^5 + x^3 - x^2 + 1\right\}}$$

Se trata de un sistema libre de $S$ pues es un conjunto formado por un único vector (polinomio) no nulo de $S$ y no puede ser base de $S$ pues contiene un único vector y todas las bases de $S$ han de contener dos vectores.

3. Sea

$$B = \{\overline{u}_1 = (1, 0, 1, 1, -2), \overline{u}_2 = (0, -1, 2, 0, 0), \overline{u}_3 = (0, -1, 2, 0, 1)\}$$

una base de cierto subespacio vectorial $S$ de $\mathbb{R}^5$. Prolongar $B$ hasta conseguir una base $B^*$ de $\mathbb{R}^5$. Justificar la respuesta.

*Solución*.–

Sea $A^*$ la matriz cuyas filas son los vectores del conjunto $B^*$, siendo

$$\boxed{B^* = \{\overline{u}_1 = (1, 0, 1, 1, -2), \overline{u}_2 = (0, -1, 2, 0, 0), \overline{u}_3 = (0, -1, 2, 0, 1), \overline{e}_1, \overline{e}_2\}}$$

Sabemos que entonces se cumple que $\mathrm{r}\ (A^*) = \mathrm{r}\ (B^*)$.

Para calcular el rango de la matriz $A^*$ vamos a comprobar que su determinante es no nulo. Desarrollando por las filas que hemos añadido:

$$\det A^* = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 1 & \boxed{1} & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} \det A^* \neq 0 \implies \mathrm{r}\ (A^*) = \mathrm{r}\ (B^*) = 5 = \mathrm{card}\, B^* \implies B^* \text{ s. libre} \\ \dim \mathbb{R}^5 = 5 = \mathrm{card}\, B^* \end{array}\right\} \implies B^* \text{ base de } \mathbb{R}^5$$

4. Consideremos el espacio vectorial euclídeo $\left(\mathbb{R}^4, \langle\ ,\ \rangle\right)$ con el producto escalar definido por:

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_4y_4$$
$$\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)\,, \overline{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$$

Hallar una base ortonormal del subespacio vectorial $S$ de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$S = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1 = (1,1,1,0), \overline{u}_2 = (1,0,0,0), \overline{u}_3 = (1,1,0,0)\}\right)$$

<u>*Solución*</u>.– Comprobaremos en primer lugar que los vectores $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u} - 3$ forman un sistema libre. Para ello escribiremos la matriz $A$ cuyas filas son los vectores $\overline{u}_i$. Como se ha mencionado previamente se cumple que:

$$\mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,\left(\{\overline{u}_1 = (1,1,1,0), \overline{u}_2 = (1,0,0,0), \overline{u}_3 = (1,1,0,0)\}\right)$$

de modo que si $\mathrm{r}\,(A) = 3$ entonces los vectores $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u} - 3$ forman un sistema libre.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{r}\,(A) = 3$$

Aplicamos el proceso de Gram–Schmidt:

- $\overline{v}_1 \;=\; \overline{u}_1 = \underline{(1,1,1,0) = \overline{v}_1}$

- $\overline{v}_2 \;=\; \overline{u}_2 - \dfrac{\langle \overline{u}_2, \overline{v}_1 \rangle}{\|\overline{v}_1\|^2} \cdot \overline{v}_1 \overset{\substack{\langle \overline{u}_2, \overline{v}_1 \rangle = 0\ ;\ \|\overline{v}_1\|^2 = 3 \\ \downarrow}}{=} \overline{u}_2 = \underline{(1,0,0,0) = \overline{v}_2}$

- $\overline{v}_3 \;=\; \overline{u}_3 - \dfrac{\langle \overline{u}_3, \overline{v}_1 \rangle}{\|\overline{v}_1\|^2} \cdot \overline{v}_1 - \dfrac{\langle \overline{u}_3, \overline{v}_2 \rangle}{\|\overline{v}_2\|^2} \cdot \overline{v}_2 \overset{\substack{\langle \overline{u}_3, \overline{v}_1 \rangle = 2\ ;\ \|\overline{v}_1\|^2 = 3 \\ \langle \overline{u}_3, \overline{v}_2 \rangle = 1\ ;\ \|\overline{v}_2\|^2 = 1 \\ \downarrow}}{=} \overline{u}_3 - \dfrac{2}{3}\overline{v}_1 - \overline{v}_2 =$

  $= \underline{\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}, 0\right) = \overline{v}_3}$

Normalizamos los vectores $\overline{v}_i$:

- $\overline{w}_1 = \dfrac{\overline{v}_1}{\|\overline{v}_1\|} \overset{\substack{\|\overline{v}_1\|^2 = 3 \\ \downarrow}}{=} \underline{\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = \overline{w}_1}$

- $\overline{w}_2 = \dfrac{\overline{v}_2}{\|\overline{v}_2\|} \overset{\substack{\|\overline{v}_2\|^2 = 1 \\ \downarrow}}{=} \underline{(1,0,0,0) = \overline{w}_2}$

- $\overline{w}_3 = \dfrac{\overline{v}_3}{\|\overline{v}_3\|} \overset{\substack{\|\overline{v}_3\|^2 = \frac{2}{3} \\ \downarrow}}{=} \underline{\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\dfrac{2}{3}}, 0\right) = \overline{w}_3}$

Una base ortonormal $B_{ON}$ de $S$ será la formada por los vectores $\overline{w}_i$. es decir:

$$\boxed{B_{ON} = \left\{\overline{w}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right), \overline{w}_2 = (1,0,0,0)\,, \overline{w}_3 = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right)\right\}}$$

# BLOQUE 2

1. En el espacio vectorial euclídeo $(\mathcal{P}_3, , \langle\ ,\ \rangle)$ con el producto escalar usual definido por:

$$\langle p(x), q(x)\rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$$
$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, q(x) = a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' \in \mathcal{P}_3$$

consideremos cierto subespacio vectorial $S$ del que sabemos que

$$B = \left\{p_1(x) = x^3 + x^2 + x + 1, p_2(x) = -3x^3 + x^2 + x + 1, p_3(x) = -2x^2 + x + 1\right\}$$

es una base ortogonal de $S$.

Calcular la mejor aproximación de $p(x) = x^3 + x$ en $S$. Justificar la respuesta.

<u>*Solución*</u>.– Como $B$ es una base ortogonal de $S$ para hallar la mejor aproximación, que denotaremos $q(x)$, de $p(x)$ en $S$ haremos:

$$q(x) = \frac{\langle p(x), p_1(x)\rangle}{\|p_1(x)\|^2} \cdot p_1(x) + \frac{\langle p(x), p_2(x)\rangle}{\|p_2(x)\|^2} \cdot p_2(x) + \frac{\langle p(x), p_3(x)\rangle}{\|p_3(x)\|^2} \cdot p_3(x)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\langle p(x), p_1(x)\rangle = 2 \quad ; \quad \langle p(x), p_2(x)\rangle = -2 \quad ; \quad \langle p(x), p_3(x)\rangle = 1$$

$$\|p_1(x)\|^2 = 4 \qquad ; \qquad \|p_2(x)\|^2 = 12 \qquad ; \qquad \|p_3(x)\|^2 = 6$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{2}{4} \cdot p_1(x) - \frac{2}{12} \cdot p_2(x) + \frac{1}{6} \cdot p_3(x) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (x^3 + x^2 + x + 1) - \frac{1}{6} \cdot (-3x^3 + x^2 + x + 1) + \frac{1}{6} \cdot (-2x^2 + x + 1) = \\ &= \boxed{x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = q(x)} \end{aligned}$$

2. Clasificar en función de los parámetros reales $a, b$ el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x + y + (a+1)z &= 0 \\ (a+1)y + (b+1)z &= b+1 \\ 2x + (1-a)y + (2a+1)z &= -1 \end{aligned}$$

<u>*Solución*</u>.– Vamos a realizar operaciones elementales de fila sobre la matriz ampliada $AM$ del sistema para clasificarlo:

$$AM = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & a+1 & 0 \\ 0 & a+1 & b+1 & b+1 \\ 2 & 1-a & 2a+1 & -1 \end{array}\right) \overset{F_3-2F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & 0 \\ 0 & \boxed{a+1} & b+1 & b+1 \\ 0 & -a-1 & -1 & -1 \end{array}\right) \overset{F_3+F_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & 0 \\ 0 & a+1 & b+1 & b+1 \\ 0 & 0 & b & b \end{array}\right)$$

Luego se tiene:

- $\boxed{a \neq -1 \wedge b \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,(AM) = 3 = \text{nro. incógnitas} \quad \Longrightarrow \quad \text{S.C.D.}}$

- $a = -1 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{r}\,(A) \leq 2.$ En este caso:

$$AM \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b+1 & b+1 \\ 0 & 0 & b & b \end{array}\right) \quad \text{Observando esta matriz resulta evidente que:}$$

- $\boxed{a = -1 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,(AM) = 2 < 3 = \text{nro. incógnitas} \quad \Longrightarrow \quad \text{S.C.I.}}$

- $b = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{r}\,(A) \leq 2.$ En este caso:

$$AM \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & 0 \\ 0 & a+1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{Observando esta matriz resulta evidente que:}$$

- $\boxed{b = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,(AM) = 2 < 3 = \text{nro. incógnitas} \quad \Longrightarrow \quad \text{S.C.I.}}$

3. Consideremos el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Escribir este sistema en forma vectorial.

Resolver este sistema, si es que es compatible, utilizando el método de Gauss.

<u>*Solución*</u>.– La expresión vectorial de este sistema es:

$$x_1 \cdot (0,1,0,-2) + x_2 \cdot (2,0,0,3) + x_3 \cdot (2,0,1,2) + x_4 \cdot (0,-2,3,-4) = (0,-3,-4,5)$$

Utilizamos el método de Gauss para la resolución de este sistema:

$$AM = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & 2 & -4 & 5 \end{array}\right) \overset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & 2 & -4 & 5 \end{array}\right) \overset{\substack{F_4+2F_1 \\ \frac{1}{2}F_2}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & -8 & -1 \end{array}\right) \overset{F_4-3F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & -1 \end{array}\right) \overset{F_4+F_3}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{rcl} x_1 - 2x_4 & = & -3 \\ x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_3 + 3x_4 & = & -4 \\ -5x_4 & = & -5 \end{array} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{rcl} x_1 & = & -1 \\ x_2 & = & 7 \\ x_3 & = & -7 \\ x_4 & = & 1 \end{array}}$$

# BLOQUE 3

1. Consideremos la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   Calcular los valores propios de $A$ indicando su orden o multiplicidad.

   Utilizando **exclusivamente** la información anterior razonar si la matriz $A$ es una matriz invertible o no.

   ¿Cuánto vale $\det A$? Justificar la respuesta.

   *Solución*.– Para calcular los valores propios de la matriz $A$ vamos a hallar su polinomio característico $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{des. } F_4}{\overset{\downarrow}{=}} (4-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{F_1+F_2+F_3}{\overset{\downarrow}{=}}$$

$$= (4-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4-\lambda & 4-\lambda \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{C_2-C_1 \\ C_3-C_1}}{\overset{\downarrow}{=}} (4-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-4)^2 \cdot (\lambda-2) \cdot (\lambda-1) \implies \boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 = 4 \ ; \ k_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 \ ; \ k_2 = 1 \\ \lambda_3 = 1 \ ; \ k_3 = 1 \end{array}}$$

   Para deducir que la matriz $\boxed{\text{A es invertible}}$ utilizando la información anterior podemos proceder de dos formas distintas:

   - $\lambda = 0$ no es valor propio de $A$, luego por el teorema de la matriz invertible $A$ es regular o invertible.
   - $\det(A - \lambda I) = (\lambda-4)^2 \cdot (\lambda-2) \cdot (\lambda-1)$, luego sustituyendo $\lambda$ por 0, se tiene:

$$\boxed{\det A \overset{p_A(0)=\det A}{\overset{\downarrow}{=}} 32} \implies A \text{ es invertible}$$

2. Consideremos la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que el polinomio característico de $A$ es:

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 15)(\lambda - 1)\lambda^2$$

hallar los subespacios propios de $A$ indicando una base de cada uno de ellos.

<u>*Solución*</u>.–

- $V(15) = \left\{\overline{x} \in \mathbb{R}^4 / A \cdot \overline{x} = 15 \cdot \overline{x}\right\} = \left\{\overline{x} \in \mathbb{R}^4 / \underbrace{(A - 15I) \cdot \overline{x} = \overline{0}}_{\text{S.H.C.I.}}\right\} \overset{*}{=}$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \phantom{-10} & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \phantom{\to} \\ \to \\ \to \\ \to \end{array} & \begin{pmatrix} -10 & 5 & 5 & 0 \\ 5 & -10 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ll} \text{INC. PRINCIPALES}: & x_2, x_3, x_4 \\ \text{INC. LIBRE}: & x_1 = a \quad \forall\, a \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 5x_1 - 10x_2 + 5x_3 & = & 0 \\ 5x_1 + 5x_2 - 10x_3 & = & 0 \\ -14x_4 & = & 0 \end{array}\right\} \implies \begin{array}{rcr} -2x_2 + x_3 & = & -a \\ x_2 - 2x_3 & = & -a \\ x_4 & = & 0 \end{array} \implies$$

$$\implies \left\{\begin{array}{rcl} x_1 = x_2 = x_3 & = & a \\ x_4 & = & 0 \end{array}\right. \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$$

$$\overset{*}{=} \{(a, a, a, 0)/a \in \mathbb{R}\} = \{a \cdot (1, 1, 1, 0)/a \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1 = (1, 1, 1, 0)\}\right) \implies$$

$$\implies \left.\begin{array}{r} B_1 = \{\overline{u}_1\} \text{ s. g. de } V(15) \\ \overline{u}_1 \neq 0 \implies B_1 \text{ s. libre} \end{array}\right\} \implies B_1 = \{\overline{u}_1\} \text{ base de } V(15)$$

- $V(1) = \left\{\overline{x} \in \mathbb{R}^4 / A \cdot \overline{x} = 11 \cdot \overline{x}\right\} = \left\{\overline{x} \in \mathbb{R}^4 / \underbrace{(A - I) \cdot \overline{x} = \overline{0}}_{\text{S.H.C.I.}}\right\} \overset{**}{=}$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \phantom{0} \end{array} \\ \begin{array}{c} \to \\ \to \\ \to \\ \phantom{\to} \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ll} \text{INC. PRINCIPALES}: & x_1, x_2, x_3 \\ \text{INC. LIBRE}: & x_4 = a \quad \forall\, a \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 & = & 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 & = & 0 \\ 5x_1 + 5x_2 + 4x_3 & = & 0 \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{rcl} x_1 = x_2 = x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & a \end{array}\right. \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$$

$$\overset{**}{=} \{(0, 0, 0, a)/a \in \mathbb{R}\} = \{a \cdot (0, 0, 0, 1)/a \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_2 = (0, 0, 0, 1)\}\right) \implies$$

$$\implies \left.\begin{array}{r} B_2 = \{\overline{u}_2\} \text{ s. g. de } V(1) \\ \overline{u}_2 \neq 0 \implies B_2 \text{ s. libre} \end{array}\right\} \implies B_2 = \{\overline{u}_2\} \text{ base de } V(1)$$

- $V(0) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^4 / A \cdot \overline{x} = 0 \cdot \overline{x}\} = \left\{ \overline{x} \in \mathbb{R}^4 / \underbrace{A \cdot \overline{x} = \overline{0}}_{\text{S.H.C.I.}} \right\} \overset{***}{=}$

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ll} \text{INC. PRINCIPALES :} & x_3, x_4 \\ \text{INC. LIBRES :} & x_1 = a\,,\ x_2 = b \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{rcl} 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & 0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{rcr} x_1 & = & a \\ x_2 & = & b \\ x_3 & = & -a-b \\ x_4 & = & 0 \end{array} \right. \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$$

$$\overset{***}{=} \{(a, b, -a-b, 0)/a, b \in \mathbb{R}\} = \{a \cdot (1, 0, -1, 0) + b \cdot (0, 1, -1, 0)/a, b \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_3 = (1, 0, -1, 0), \overline{u}_4 = (0, 1, -1, 0)\}\right) \implies$$

$$\left. \begin{array}{r} \implies \quad B_3 = \{\overline{u}_3, \overline{u}_4\} \text{ s. g. de } V(0) \\ \overline{u}_3 \neq \alpha \cdot \overline{u}_4 \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \quad \implies \quad B_2 \text{ s. libre} \end{array} \right\} \implies B_3 = \{\overline{u}_3, \overline{u}_4\} \text{ base de } V(0)$$

La solución del ejercicio es:

- $\boxed{\begin{array}{l} V(15) = \{(a, a, a, 0)/a \in \mathbb{R}\} \\ B_1 = \{\overline{u}_1 = (1, 1, 1, 0)\} \text{ base de } V(15) \end{array}}$

- $\boxed{\begin{array}{l} V(1) = \{(0, 0, 0, a)/a \in \mathbb{R}\} \\ B_2 = \{\overline{u}_2 = (0, 0, 0, 1)\} \text{ base de } V(1) \end{array}}$

- $\boxed{\begin{array}{l} V(0) = \{(a, b, -a-b, 0)/a, b \in \mathbb{R}\} \\ B_3 = \{\overline{u}_3 = (1, 0, -1, 0), \overline{u}_4 = (0, 1, -1, 0)\} \text{ base de } V(0) \end{array}}$

3. a.– Sea $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ cuyo espectro es:

$$\sigma = \{1, 2, 4\}$$

Además se cumple que:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Demostrar que $A$ es diagonalizable y diagonalizar $A$.

*<u>Solución</u>*.– Según los datos del ejercicio:

$$\begin{array}{lclcl} \lambda_1 = 1 & ; & k_1 = 1 = d_1 & ; & B_1 = \{(1, 0, -1)\} \text{ base de } V(1) \\ \lambda_2 = 2 & ; & k_2 = 1 = d_2 & ; & B_2 = \{(-2, 1, 1)\} \text{ base de } V(2) \\ \lambda_3 = 4 & ; & k_3 = 1 = d_3 & ; & B_3 = \{(2, 3, 1)\} \text{ base de } V(4) \end{array}$$

Por lo tanto la matriz $\boxed{\text{A es diagonalizable}}$ ya que se cumple que:

- $k_1 + k_2 + k_3 = 3$
- $k_i = d_i \quad i = 1, 2, 3$

Se cumplirá además que:

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot A \cdot P, \quad \text{siendo } P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

b.– ¿Para qué valores del parámetro real $m$ es diagonalizable ortogonalmente la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m-2 & 0 \\ -m & 2 & 1 \\ 0 & 1 & m+2 \end{pmatrix} ?$$

Justificar la respuesta.

*Solución*.– Una matriz cuadrada real $A$ es diagonalizable ortogonalmente si y sólo si es una matriz simétrica. Por lo tanto:

$$\boxed{A \text{ diagonalizable ortogonalmente} \quad \Longleftrightarrow \quad m - 2 = -m \quad \Longleftrightarrow \quad m = 1}$$