BLOQUE 1

- EJERCICIO 1: 2 PUNTOS
- EJERCICIO 2: 2 PUNTOS
- EJERCICIO 3: 2 PUNTOS
- EJERCICIO 4: 4 PUNTOS

1. Consideremos el conjunto

$$S = \left\{p(x) \in \mathcal{P}_3 / p'(0) = 0 \,\wedge\, p(1) - 2p(0) = 0\right\} \subset \mathcal{P}_3$$

   Demostrar que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3$. Hallar una base B de S e indicar la dimensión de S.

2. Consideremos el subespacio vectorial S de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \mathcal{L}\left(\left\{A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

   Hallar un sistema generador G de S que no sea base de S. Justificar la respuesta.

   Hallar un sistema libre F de S que no sea sistema generador de S. Justificar la respuesta.

3. Sea

$$B = \left\{p_1(x) = -x^3 + 2x^2 + 1, p_2(x) = -x^3 + 2x^2, p_3(x) = x^4 + x^2 + x - 2\right\}$$

   una base de cierto subespacio vectorial S de $\mathcal{P}_4$. Prolongar B hasta conseguir una base B^* de $\mathcal{P}_4$. Justificar la respuesta.

4. Consideremos el espacio vectorial euclídeo $\left(\mathbb{R}^4, \langle\ ,\ \rangle\right)$ con el producto escalar definido por:

$$\langle \overline{x}, \overline{y}\rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_4y_4 - x_3y_4 - x_4y_3$$
$$\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4), \overline{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$$

   Hallar una base ortonormal del subespacio vectorial S de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$S = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1 = (1,1,1,0), \overline{u}_2 = (1,0,0,0), \overline{u}_3 = (1,1,0,0)\}\right)$$

BLOQUE 2

- EJERCICIO 1: 3 PUNTOS
- EJERCICIO 2: 4 PUNTOS
- EJERCICIO 3: 3 PUNTOS

1. En el espacio vectorial euclídeo $(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \langle\ ,\ \rangle)$ con el producto escalar usual definido por:

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(B^T \cdot A) \quad \text{con } A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}),$$

(donde tr significa la traza de una matriz cuadrada, es decir, la suma de los elementos de su diagonal principal) consideremos cierto subespacio vectorial S del que sabemos que

$$B = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base ortogonal de S.

Calcular la mejor aproximación de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en S. Justificar la respuesta.

2. Clasificar en función de los parámetros reales p, q el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 + (p+2)x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + (2p+3)x_2 - px_3 & = & -1 \\ qx_2 + (p+2)x_3 & = & 2q \end{array}\right\}$$

3. Consideremos el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Escribir este sistema en forma vectorial.

Resolver este sistema, si es que es compatible, utilizando el método de Gauss.

BLOQUE 3

- EJERCICIO 1: 3 PUNTOS
- EJERCICIO 2: 4 PUNTOS
- EJERCICIO 3: 3 PUNTOS

1. Consideremos la matriz real
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Calcular los valores propios de A indicando su orden o multiplicidad.

   Utilizando **exclusivamente** la información anterior razonar si la matriz A es una matriz invertible o no.

2. Consideremos la matriz real
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
Teniendo en cuenta que el polinomio característico de A es:
$$p_A(\lambda) = (\lambda - 6)(\lambda - 3)\lambda^2$$
calcular la dimensión de cada uno de los subespacios propios de A. Justificar la respuesta.

3. a.– Sea $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ cuyo espectro es:
$$\sigma = \{-2, 1, 0\}$$
Además se cumple que:
$$A \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Demostrar que A es diagonalizable y diagonalizar A.

   ¿Cuánto vale $\det A$? Justificar la respuesta.

   b.– ¿Para qué valores de los parámetros reales a, b es diagonalizable ortogonalmente la matriz real
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+2 & 0 \\ -a & 2 & 1 \\ 0 & 1 & b-1 \end{pmatrix} ?$$
Justificar la respuesta.