BLOQUE 1

- EJERCICIO 1: 2 PUNTOS
- EJERCICIO 2: 2 PUNTOS
- EJERCICIO 3: 2 PUNTOS
- EJERCICIO 4: 4 PUNTOS

1. Consideremos el conjunto

$$S = \left\{ p(x) \in \mathcal{P}_4 / p(0) = 0 \wedge p''(0) = 0 \wedge p'(1) - 4p(1) = 0 \right\} \subset \mathcal{P}_4$$

   Demostrar que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_4$. Hallar una base B de S e indicar la dimensión de S.

2. Consideremos el subespacio vectorial S de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$S = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1 = (2,5,0,-3,-3), \overline{u}_2 = (0,-1,0,1,1), \overline{u}_3 = (1,1,0,0,0)\}\right)$$

   Hallar un sistema generador G de S que no sea base de S. Justificar la respuesta.

   Hallar un sistema libre F de S que no sea base de S. Justificar la respuesta.

3. Sea

$$B = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

   una base de cierto subespacio vectorial S de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Prolongar B hasta conseguir una base B^* de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Justificar la respuesta.

4. Consideremos el espacio vectorial euclídeo $\left(\mathbb{R}^4, \langle\ ,\ \rangle\right)$ con el producto escalar definido por:

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_4y_4$$
$$\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4), \overline{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$$

   Hallar una base ortonormal del subespacio vectorial S de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$S = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1 = (1,0,0,0), \overline{u}_2 = (1,1,1,0), \overline{u}_3 = (0,1,1,1)\}\right)$$

BLOQUE 2

- EJERCICIO 1: 3 PUNTOS
- EJERCICIO 2: 4 PUNTOS
- EJERCICIO 3: 3 PUNTOS

1. En el espacio vectorial euclídeo $(\mathcal{P}_3, \langle\ ,\ \rangle)$ con el producto escalar usual definido por:

$$\langle p(x), q(x)\rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$$
$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, q(x) = a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' \in \mathcal{P}_3$$

   consideremos cierto subespacio vectorial S del que sabemos que

$$B = \left\{p_1(x) = x^3 + x, p_2(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2, p_3(x) = -2x^3 + x^2 + 2x + 1\right\}$$

   es una base ortogonal de S.

   Calcular la mejor aproximación de $p(x) = x^2 + 1$ en S. Justificar la respuesta.

2. Clasificar en función de los parámetros reales λ, μ el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 2x_1 + (2\mu+3)x_2 - \mu x_3 &= -1 \\ x_1 + (\mu+2)x_2 + x_3 &= 0 \\ \lambda x_2 + (\mu+2)x_3 &= \lambda \end{aligned}$$

3. Consideremos el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

   Escribir este sistema en forma vectorial.

   Resolver este sistema, si es que es compatible, utilizando el método de Gauss.

BLOQUE 3

- EJERCICIO 1: 3 PUNTOS
- EJERCICIO 2: 4 PUNTOS
- EJERCICIO 3: 3 PUNTOS

1. Consideremos la matriz real
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Calcular los valores propios de A indicando su orden o multiplicidad.

   Utilizando **exclusivamente** la información anterior razonar si la matriz A es una matriz invertible o no.

   ¿Cuánto vale $\det A$? Justificar la respuesta.

2. Consideremos la matriz real
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   Teniendo en cuenta que el polinomio característico de A es:
$$p_A(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-3)^2(\lambda-5)$$

   hallar los subespacios propios de A indicando una base de cada uno de ellos.

3. a.– Sea $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ cuyo espectro es:
$$\sigma = \{0, 2\}$$

   Además se cumple que:

   - $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
   - $B_1 = \{\overline{u}_1 = (0,1,0,1), \overline{u}_2 = (1,0,1,0)\}$ es base de $V(2)$

   Demostrar que A es diagonalizable y diagonalizar A.

   b.– Calcular la matriz A del apartado anterior. Justificar la respuesta.