BLOQUE 1

1. Consideremos el conjunto

$$S = \left\{ X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) / X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \right\} \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

   Demostrar que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Hallar una base B de S e indicar la dimensión de S.

2. Consideremos el subespacio vectorial S de $\mathcal{P}_5$ definido por:

$$S = \mathcal{L}\left(\left\{p_1(x) = x^5 + x^3 - x^2 + 1, p_2(x) = 2x^5 + x^4 + x^2, p_3(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3\right\}\right)$$

   Hallar un sistema generador G de S que no sea base de S. Justificar la respuesta.

   Hallar un sistema libre F de S que no sea base de S. Justificar la respuesta.

3. Sea

$$B = \{\overline{u}_1 = (1, 0, 1, 1, -2), \overline{u}_2 = (0, -1, 2, 0, 0), \overline{u}_3 = (0, -1, 2, 0, 1)\}$$

   una base de cierto subespacio vectorial S de $\mathbb{R}^5$. Prolongar B hasta conseguir una base B^* de $\mathbb{R}^5$. Justificar la respuesta.

4. Consideremos el espacio vectorial euclídeo $\left(\mathbb{R}^4, \langle\ ,\ \rangle\right)$ con el producto escalar definido por:

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_4y_4$$
$$\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4), \overline{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$$

   Hallar una base ortonormal del subespacio vectorial S de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$S = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1 = (1, 1, 1, 0), \overline{u}_2 = (1, 0, 0, 0), \overline{u}_3 = (1, 1, 0, 0)\}\right)$$

- EJERCICIO 1: 2 PUNTOS
- EJERCICIO 2: 2 PUNTOS
- EJERCICIO 3: 2 PUNTOS
- EJERCICIO 4: 4 PUNTOS

BLOQUE 2

1. En el espacio vectorial euclídeo $(\mathcal{P}_3, , \langle\ ,\ \rangle)$ con el producto escalar usual definido por:

$$\langle p(x), q(x)\rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$$
$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, q(x) = a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' \in \mathcal{P}_3$$

   consideremos cierto subespacio vectorial S del que sabemos que

$$B = \left\{p_1(x) = x^3 + x^2 + x + 1, p_2(x) = -3x^3 + x^2 + x + 1, p_3(x) = -2x^2 + x + 1\right\}$$

   es una base ortogonal de S.

   Calcular la mejor aproximación de $p(x) = x^3 + x$ en S. Justificar la respuesta.

2. Clasificar en función de los parámetros reales a, b el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y + (a+1)z & = & 0 \\ (a+1)y + (b+1)z & = & b+1 \\ 2x + (1-a)y + (2a+1)z & = & -1 \end{array}\right\}$$

3. Consideremos el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

   Escribir este sistema en forma vectorial.

   Resolver este sistema, si es que es compatible, utilizando el método de Gauss.

- EJERCICIO 1: 3 PUNTOS
- EJERCICIO 2: 4 PUNTOS
- EJERCICIO 3: 3 PUNTOS

BLOQUE 3

1. Consideremos la matriz real
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
Calcular los valores propios de A indicando su orden o multiplicidad.

   Utilizando **exclusivamente** la información anterior razonar si la matriz A es una matriz invertible o no.

   ¿Cuánto vale $\det A$? Justificar la respuesta.

2. Consideremos la matriz real
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Teniendo en cuenta que el polinomio característico de A es:
$$p_A(\lambda) = (\lambda - 15)(\lambda - 1)\lambda^2$$
hallar los subespacios propios de A indicando una base de cada uno de ellos.

3. a.– Sea $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ cuyo espectro es:
$$\sigma = \{1, 2, 4\}$$
Además se cumple que:
$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Demostrar que A es diagonalizable y diagonalizar A.

   b.– ¿Para qué valores del parámetro real m es diagonalizable ortogonalmente la matriz real
$$A = \begin{pmatrix} 1 & m-2 & 0 \\ -m & 2 & 1 \\ 0 & 1 & m+2 \end{pmatrix}?$$
Justificar la respuesta.

- EJERCICIO 1: 3 PUNTOS
- EJERCICIO 2: 4 PUNTOS
- EJERCICIO 3: 3 PUNTOS