1. Ejercicios unidad temática 1

1.1. Ejercicios a resolver en clase

Ejercicio 1.1.– Sean las matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a.– Hallar B^4 , B^5 , B^{200} y B^{201}.

b.– Hallar C^2 , C^5 , C^{10} , C^{200} y C^{201}.

Ejercicio 1.2.– Sean dos matrices A , $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ que conmutan ($A \cdot B = B \cdot A$) y además idempotentes ($A^2 = A$, $B^2 = B$). Demostrar que:

$$(A + B)^3 \cdot (A - B) = A - B$$

Ejercicio 1.3.– Sean dos matrices A , $B \in \mathcal{M}_{p\times p}(\mathbb{R})$. Demostrar que:

a.– $A \cdot A^T$ es simétrica.

b.– A y B simétricas $\implies$ $(A + B)^n$ simétrica $\forall n \in \mathbb{N}$.

c.– A y B antisimétricas $\implies$ $\big[\,(A + B)^n$ simétrica $\forall n$ (par) $\in \mathbb{N}$ y $(A + B)^n$ antisimétrica $\forall n$ (impar) $\in \mathbb{N}\big]$.

d.– Sean A y B antisimétricas. Probar que: $A \cdot B$ simétrica $\iff$ $A \cdot B = B \cdot A$.

1.2. Ejercicios propuestos (con solución)

Ejercicio 1.4.– Sean las matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

a.– Hallar B^4 , B^6 B^{20} y B^n $(\forall n \in \mathbb{N})$.

Solución.– $B^2 = 2B \implies B^n = 2^{n-1} \cdot B$

b.– Hallar $B + C$, $4 \cdot C$, $C \cdot B^2$ y $B \cdot C$.

Solución.–

$$B + C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 7 & 6 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad 4 \cdot C = \begin{pmatrix} -12 & 16 & 12 \\ 28 & 24 & 8 \\ 8 & 32 & 16 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 18 & 0 & 18 \\ 12 & 0 & 12 \end{pmatrix} \quad , \quad B \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 12 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 12 & 7 \end{pmatrix}$$

c.– ¿Se pueden efectuar las siguientes operaciones matriciales:

$$B \cdot D\,,\; D \cdot C\,,\; C + D \;\text{ y }\; D^3\,?$$

¿Por qué? Indica el resultado, si se pueden realizar.

Solución.– El producto $D \cdot C$ no se puede realizar, pues el número de columnas de D, que es 2, no coincide con el número de filas de C, que es 3.

La suma $C + D$ no se puede realizar pues las matrices C y D no tienen el mismo orden.

Sólo podemos calcular potencias de matrices cuadradas, luego no tiene sentido hablar de D^3.

$$B \cdot D = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.5.– Sea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a.– Comprobar que para la matriz $B = A - I_3$ se cumple $B^3 = (0)_{3\times 3}$.

Solución.–

$$B = A - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B^3 = (0)$$

b.– Calcular A^5 y A^6. ¿Cuánto vale A^{250}? (Escribir A^{250} en función de B).

Solución.–

$$\begin{aligned} A^5 &= (I+B)^5 = I + 5B + 10B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 10 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^6 &= (I+B)^6 = I + 6B + 15B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 15 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^{250} &= (I+B)^{250} = I + 250B + 31125B^2 \end{aligned}$$

1.3. Cuestiones verdadero/falso

Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ es antisimétrica.
2. La traspuesta de una matriz idempotente es idempotente.
3. Si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, los productos $A \cdot B^T$ y $A^T \cdot B$ están definidos.
4. Si A y B son dos matrices tales que $A \cdot B = (0)$, entonces $A = (0)$ o $B = (0)$.
5. Si A es una matriz antisimétrica, entonces A^n es antisimétrica $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.4. Cuestiones múltiple elección

En cada una de las preguntas del test, debe indicarse la o las respuestas correctas de las diferentes posibilidades existentes (puede haber una, más de una o ninguna). Los dos primeros fallos no se tendrán en cuenta, pero a partir del tercer fallo, por cada uno de ellos, se descontará la mitad de la puntuación de un acierto.

1. Sean las matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.
   ◯ $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2\cdot A\cdot B$.
   ◯ $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.
   ◯ $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2\cdot B\cdot A$.
   ◯ $(A+B)^2 = A\cdot B + B\cdot A + A^2 + B^2$.

2. La matriz unidad de orden n es:
   ◯ Triangular superior.
   ◯ Triangular inferior.
   ◯ Involutiva.
   ◯ Idempotente.
   ◯ Simétrica.
   ◯ Antisimétrica.

3. ¿Cuáles de estas matrices son antisimétricas?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   ◯ A y B.
   ◯ Ninguna.
   ◯ Sólo A.
   ◯ Sólo B.

4. Consideremos la siguiente matriz real: $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ a & 1 & -2 \\ b & c & 2 \end{pmatrix}$. Sabiendo que $A\cdot A^T = 9\cdot I_3$
   ◯ $a = 3\,,\ b = 2\,,\ c = 1$.
   ◯ $a = -2\,,\ b = 1\,,\ c = 2$.
   ◯ $a = c = 2\,,\ b = 0$.
   ◯ $a = 1\,,\ b = -4\,,\ c = 3$.
   ◯ $a = 0\,,\ b = 3\,,\ c = -2$.

5. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 - 2A + I = (0)_{n\times n}$.
   ◯ $A^4 = 4A - 3I$.
   ◯ $A^4 = A - I$.
   ◯ $A^4 = 4A + 6I$.

2. Ejercicios unidad temática 2

2.1. Ejercicios a resolver en clase

Ejercicio 2.1.– Calcular los determinantes de las siguientes matrices reales:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.2.–

a.– Sea A una matriz cuadrada real de orden 3 tal que $\det A = 5$. Calcular, utilizando las propiedades de los determinantes, $\det(-A)$, $\det(4\,A)$ y $\det(A^4)$.

b.– Decir si $\det(A+B) = \det A + \det B \quad \forall A\,,\, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es verdadero o falso, demostrándolo o dando un contraejemplo según proceda.

Ejercicio 2.3.– Calcular el rango de las siguientes matrices (según el valor del parámetro real $m \in \mathbb{R}$ en el caso de las matrices $B\,, C$ y D).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & m+1 \\ 1 & 1 & -m & m+1 \\ m & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} , \; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m & 1 \\ m & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & m & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad E = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.4.– Calcular el rango de la siguiente matriz real, dependiendo de los distintos valores de $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \lambda & 2 \\ 5 & 3 & 2\lambda+2 & \lambda \\ \lambda & 0 & \lambda & 9 \end{pmatrix}$$

2.2. Ejercicios propuestos (con solución)

Ejercicio 2.5.– Hallar el determinante de las siguientes matrices reales y obtener el rango de cada una de ellas.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0\\ 1 & 4 & -1 & 0 & 0\\ 5 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 243\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 9 & -27 & 81 & -243\\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 \end{pmatrix}$$

Solución.–

- $\det A = 225 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{r}\,(A)=5$
- $\det B$ (determinante de Vandermonde)
  $\det B = -691200 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{r}\,(B)=6$

Ejercicio 2.6.– Calcular el rango de las siguientes matrices según el valor de los parámetros $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, empleando operaciones elementales de fila.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -(\alpha+1) & 1 & 1\\ 1 & -1 & \beta & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & \alpha+1 & \alpha\\ 1 & -2 & 1 & \beta \end{pmatrix}$$

Solución.–

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -(\alpha+1) & 1 & 1\\ 1 & -1 & \beta & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim\cdots\sim \begin{pmatrix} 1 & -(\alpha+1) & 1 & 1\\ 0 & \alpha & \beta-1 & 0\\ 0 & 0 & -\beta-1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{\alpha\neq 0 \wedge \beta\neq -1} : \underline{\mathrm{r}\,(A)=3}\\ \underline{\alpha=0 \vee \beta=-1} : \underline{\mathrm{r}\,(A)=2} \end{array} \right.$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & \alpha+1 & \alpha\\ 1 & -2 & 1 & \beta \end{pmatrix} \sim\cdots\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \alpha & \alpha\\ 0 & 0 & 0 & \beta+1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{\alpha\neq 0 \wedge \beta\neq -1} : \underline{\mathrm{r}\,(B)=4}\\ \underline{\alpha=0 \wedge \beta\neq -1} : \underline{\mathrm{r}\,(B)=3}\\ \underline{\alpha\neq 0 \wedge \beta=-1} : \underline{\mathrm{r}\,(B)=3}\\ \underline{\alpha=0 \wedge \beta=-1} : \underline{\mathrm{r}\,(B)=2} \end{array} \right.$$

Ejercicio 2.7.– Calcular el determinante de las siguientes matrices según el parámetro $\alpha\in\mathbb{R}$:

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2\\ 1 & \alpha & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & \alpha\\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(\alpha-2)(\alpha+5)$$

$$\det B=\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3\\ 0 & 1 & \alpha & \alpha^2\\ 0 & \alpha & 1 & \alpha\\ \alpha & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1-\alpha^2$$

Ejercicio 2.8.– Calcular el rango de las matrices A y B, según los valores del parámetro $x\in\mathbb{R}$ para la matriz B.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 5 & 1 & 0\\ 3 & 1 & -3 & 5 & 0\\ 4 & 2 & -2 & 9 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & x & 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & x & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1 & x & -1\\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución.–

$$\mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,(A^T) = \underline{3 = \mathrm{r}\,(A)} \quad \text{Ejercicio 2.3 A}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{F_i+F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \det B = 0 \\ \mathrm{r}\,(B) = 4 \ \text{ si } \ x \neq -1 \\ \mathrm{r}\,(B) = 3 \ \text{ si } \ x = -1 \end{cases}$$

2.3. Cuestiones verdadero/falso

Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. Si $\det A = 5$, entonces $\det(-A) = -5$.
2. Existe una matriz A idempotente con $\det A = 2$.
3. El determinante del producto de dos matrices $A \times B$, con $A \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{1\times 2}(\mathbb{R})$, es siempre cero.
4. Si $A = -A^T$, entonces $\det A = 0$.
5. Si A es una matriz idempotente, entonces $2A - I$ es una matriz involutiva.

2.4. Cuestiones múltiple elección

En cada una de las preguntas del test, debe indicarse la o las respuestas correctas de las diferentes posibilidades existentes (puede haber una, más de una o ninguna). Los dos primeros fallos no se tendrán en cuenta, pero a partir del tercer fallo, por cada uno de ellos, se descontará la mitad de la puntuación de un acierto.

1. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 3$ y $B = \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 2c-b & 2a-c & 2b-a \\ b-a & c-b & a-c \end{pmatrix}$.

   ◯ $\det B = 9$.

   ◯ $\det B = 0$.

   ◯ $\det B = -9$.

   ◯ $\det B = 18$.

2. Si A y B son matrices cuadradas

   ◯ $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.

   ◯ $\det(A \cdot B \cdot A^T) = \det(A^2 \cdot B)$.

   ◯ $\det(A^n \cdot B^n) = \det(A \cdot B)^n$.

   ◯ $\det(A^T \cdot B^T) = \det(A \cdot B)$.

3. Sea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ con $a, b \neq 0$.

   ◯ $\det A = (a^2 - b^2)^3$.

   ◯ $\det A = (a^4 - b^4)(a^2 - b^2)$.

   ◯ $\det A = 2a^6 + 6a^4b^2 + 6a^2b^4 + 2b^6$.

   ◯ $\det A = a^6 - 3a^4b^2 + 3a^2b^4 - b^6$.

   ◯ $\det A = a^6 - b^6$.

4. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $\det A = 5$

   ◯ $\det(-A) = (-1)^n \cdot \det A$.

   ◯ $\det(-A) = \det A$ si n es par.

   ◯ $\det(-A) = -\det A$ si n es impar.

   ◯ $\det(-A) = -\det A$.

5. Si en una matriz cuadrada escribimos las filas en orden inverso

   ◯ Su determinante queda multiplicado por-1.

   ◯ Su determinante no varía.

   ◯ Su determinante queda multiplicado por$(-1)^n$.

   ◯ Su determinante queda multiplicado por$(-1)^{n/2}$.

3. Ejercicios unidad temática 3

3.1. Ejercicios a resolver en clase

Ejercicio 3.1.– Sea la matriz cuadrada real:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & \alpha & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a.– Probar que A es regular si y sólo si $\alpha \neq -1, 0$.

b.– Para $\alpha = 1$ calcular A^{-1}, utilizando operaciones elementales de filas.

Ejercicio 3.2.– Probar que la siguiente matriz real es regular y calcular su inversa utilizando un sistema de ecuaciones:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.3.–

a.– Demostrar que toda matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ nilpotente es singular.

b.– Demostrar que si $A \in \mathcal{M}_{(2n+1)\times(2n+1)}(\mathbb{R})$ es antisimétrica, entonces A es una matriz singular.

c.– Demostrar que toda matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ involutiva es regular, indicando su inversa.

Ejercicio 3.4.–

a.– Comprobar que la matriz $B = A - I_3$ es nilpotente de índice 3, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b.– Sabiendo que $B = I_3 - A$ es nilpotente de índice 3 calcular A^{20} y A^{-20}.

c.– ¿Cuánto vale A^{200} y A^{-200}?

Ejercicio 3.5.–

a.– Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se define la matriz $B = I_n + A$. Demostrar que A es ortogonal si y sólo si $B \cdot B^T = B + B^T$.

b.– Encontrar todas las matrices reales cuadradas de orden 2 que son, al mismo tiempo, ortogonales y antisimétricas.

c.– Calcular la inversa de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

d.– Demostrar que si A es una matriz regular que conmuta con su traspuesta, entonces la matriz $P = A^{-1} \cdot A^T$ es ortogonal.

Ejercicio 3.6.– Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

utilizando la teoría de operaciones elementales de filas:

a.– Calcular $\det A$.

b.– Razonar para qué valores de $m \in \mathbb{R}$ la matriz A es singular.

c.– Calcular A^{-1} cuando sea posible.

3.2. Ejercicios propuestos (con solución)

Ejercicio 3.7.– Dada la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & \Phi \\ -4 & 4 & \Phi \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

a.– Determinar el valor del parámetro $\Phi \in \mathbb{R}$ para el cual $B = I_3 + A$, con A matriz idempotente.

Solución.– $\quad \Phi = -2$

b.– Calcular $B^n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Solución.– $\quad B^n = I + (2^n - 1)A$

Ejercicio 3.8.– Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \xi^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \xi^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \xi^4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi^5 \end{pmatrix}$$

según los valores que pueda tomar el parámetro $\xi \in \mathbb{R}$.

Solución.–

$$\begin{array}{ll} \xi \neq 1 & \mathrm{r}(A) = 6 \\ \xi = 1 & \mathrm{r}(A) = 5 \end{array}$$

Ejercicio 3.9.– Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a.– Demostrar que A satisface la ecuación:

$$A^2 - 2A - 3I_4 = (0)_{4\times 4}$$

b.– Hallar $\det A$.

c.– Calcular la inversa de A, en caso de que sea posible.

Solución.–

- $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A^2 - 2A - 3I_4 = (0)_{4\times 4}$

- $\det A = -3$

- $A^{-1} = 1/3(A - 2I)$

d.– Hallar A^4 y A^{-4}.

Solución.–

- $A^4 = A^2 \cdot A^2 = (2A + 3I)^2 = \cdots = 20A + 21I = A^4$

- $A^{-4} = \frac{1}{81}(61I - 20A)$

e.– Escribir A^{200} y A^{-10} en función de las matrices A e I_4.

Solución.–

La solución de este problema no es sencilla. Calcular A^{200} supone bastante esfuerzo, por lo que se recomienda demostrar por inducción una fórmula para A^n.

Después de calcular las primeras potencias naturales de A y de A^{-1} vemos que la ley de formación que siguen sus elementos es diferente si los elementos están en la diagonal principal o fuera de ella. Para formular una hipótesis de inducción, que luego deberíamos probar, tendremos que fijarnos en cómo formamos la matriz A^{n+1} en función de los elementos de la matriz A^n; para ello escribiremos.

$$A^{n+1} = A \cdot A^n$$

Recogemos en el siguiente cuadro cómo son los elementos de las primeras potencias de A y de A^{-1} lo que nos va a permitir formular una hipótesis de inducción.

potencias de la matriz A	elementos de las matrices	
	a_{ii}	$a_{ij},\ i \neq j$
A^2	$3 = \frac{3^2-1}{4} + 1$	$3 - 1 = \frac{3^2-1}{4}$
A^3	$3(3-1) = \frac{3^3+1}{4} - 1$	$3^2 - 3 + 1 = \frac{3^3+1}{4}$
A^4	$3^3 - 3^2 + 3 = \frac{3^4-1}{4} + 1$	$3^3 - 3^2 + 3 - 1 = \frac{3^4-1}{4}$

$$A^{200} = \begin{pmatrix} \frac{3^{200}-1}{4} + 1 & \frac{3^{200}-1}{4} & \frac{3^{200}-1}{4} \\ \frac{3^{200}-1}{4} & \frac{3^{200}-1}{4} + 1 & \frac{3^{200}-1}{4} \\ \frac{3^{200}-1}{4} & \frac{3^{200}-1}{4} & \frac{3^{200}-1}{4} + 1 \end{pmatrix} = \frac{3^{200}-1}{4}(A+I) + I$$

$$A^{200} = \frac{3^{200}-1}{4}(A+I) + I = \frac{3^{200}-1}{4}A + \left(\frac{3^{200}-1}{4} + 1\right) I$$

$$A^{-10} = \left(A^{-1}\right)^{10} = \frac{1}{3^{10}}\left(A - 2I\right)^{10} = \frac{1}{3^{10}}\left(44287I - 14762A\right)$$

Ejercicio 3.10.– Sea $A \in \mathcal{R}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^4 + 2A^2 + 6I_n = -A^3$. Calcula A^{-1}.
Solución.–

$$I_n = \frac{1}{6}\left(A^3 + A^2 + 2A\right) \cdot A \quad \Longrightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{6}\left(A^3 + A^2 + 2A\right)$$

Ejercicio 3.11.– Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tales que $A \cdot A^T = I_n$ y $B \cdot C = A$. Justifica cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son necesariamente ciertas.

a.– B es invertible y $B^{-1} = A^T \cdot C$. Falso.

b.– B y C son invertibles y $\left(B^{-1}\right)^T \cdot \left(C^{-1}\right)^T = A^T$. Falso.

c.– Se cumple que $A \cdot C^T \cdot B^T = I_n$. Verdadero.

3.3. Cuestiones verdadero/falso

Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. La inversa de una matriz ortogonal es siempre ortogonal.
2. Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $\det A = 5$, y $B = 3\left(A^{-1}\right)^2 \cdot A^T$, entonces $\det B = \frac{3}{5}$.
3. Si $A, B \in \mathcal{R}_{n\times n}(\mathbb{R})$, entonces $A \cdot B$ es una matriz regular y $(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$.
4. La matriz $A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es invertible $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
5. Existen matrices simétricas y ortogonales que no son involutivas.

3.4. Cuestiones múltiple elección

En cada una de las preguntas del test, debe indicarse la o las respuestas correctas de las diferentes posibilidades existentes (puede haber una, más de una o ninguna). Los dos primeros fallos no se tendrán en cuenta, pero a partir del tercer fallo, por cada uno de ellos, se descontará la mitad de la puntuación de un acierto.

1. Sean A, B y C matrices cuadradas regulares del mismo orden:
   - ◯ $(A \cdot B \cdot C)^{-1} = C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$.
   - ◯ $(A \cdot B \cdot C)^{-1} = (B \cdot C)^{-1} \cdot A^{-1}$.
   - ◯ $(A \cdot B \cdot C)^{-1} = \left(C^T \cdot B^T \cdot A^T\right)^{-1}$.
   - ◯ $(A \cdot B \cdot C)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot C^{-1}$.

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, la primera fila de A^{-1} es:
   - ◯ $(1, 0, -2)$.
   - ◯ $(1, 1, -1)$.
   - ◯ $(2, -2, 1)$.
   - ◯ $(-1, 2, -1)$.
   - ◯ $(1, -2, 1)$.
   - ◯ $(-1, 0, 2)$.

3. Sean A, $B \in \mathcal{R}_{n\times n}(\mathbb{R})$.
   - ◯ $A + B \in \mathcal{R}_{n\times n}(\mathbb{R})$.
   - ◯ $A \cdot B \cdot A^{-1} \in \mathcal{R}_{n\times n}(\mathbb{R})$.
   - ◯ $B^{-1} \cdot A^T \in \mathcal{R}_{n\times n}(\mathbb{R})$.
   - ◯ $A \cdot B \in \mathcal{R}_{n\times n}(\mathbb{R})$.
   - ◯ $A^T \cdot B^T \in \mathcal{R}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

4. Sean A, Q, $X \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con Q matriz ortogonal y $A = (Q \cdot X)^T \cdot Q \cdot X$.
   - ◯ $A = Q^T \cdot X^T \cdot Q \cdot X$.
   - ◯ $A = X^T \cdot X$.
   - ◯ $A = X \cdot X^T$.
   - ◯ $A = Q^T \cdot X^2 \cdot Q$.
   - ◯ $\det A = (\det X)^2$.

5. Sean A, B, $P \in \mathcal{R}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con P matriz invertible, tales que $B = P \cdot A \cdot P^{-1}$.
   - ◯ $\det A = \det P \cdot \det B$.
   - ◯ $\det A = 1$.
   - ◯ $A^m = \left(P^{-1}\right)^m \cdot B^m \cdot P^m \quad \forall m \in \mathbb{N}$.
   - ◯ $\det A = \det B$.
   - ◯ $\det A = (\det P)^2 \cdot \det B$.
   - ◯ $A^m = P^{-1} \cdot B^m \cdot P$.
   - ◯ $\det(A^m) = \det(B^m) \quad \forall m \in \mathbb{N}$.

4. Ejercicios unidad temática 4

4.1. Ejercicios a resolver en clase

Ejercicio 4.1.– Consideremos el sistema de ecuaciones lineales expresado vectorialmente por:

$$x_1\,\overline{a}'_1 + x_2\,\overline{a}'_2 + x_3\,\overline{a}'_3 = \overline{b},$$

siendo: $\overline{a}'_1 = (1,\alpha,1)\,,\ \overline{a}'_2 = (1,1,2)\,,\ \overline{a}'_3 = (\beta,\beta,\beta)\,,\ \overline{b} = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$. Se pide:

a.– Escribir matricialmente el sistema.

b.– Clasificar el sistema.

c.– Resolver el sistema en los casos posibles.

Ejercicio 4.2.– Sea el sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es:

$$AM = \left(\begin{array}{ccc|c} m^2 & 1 & m & m \\ m & m & 1 & m^2 \\ m & m & m^2 & 1 \\ 1 & m^2 & m & m \end{array}\right)$$

a.– Escribir el sistema en forma vectorial.

b.– Clasificar el sistema.

c.– Resolver el sistema en los casos posibles.

Ejercicio 4.3.– Consideremos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha x_1 - x_2 - x_3 & = & -1 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 - x_3 & = & -1 \\ \alpha x_1 + x_2 + \beta x_3 & = & -1 \\ \alpha x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

a.– Clasificar el sistema.

b.– Resolver el sistema en los casos posibles.

Ejercicio 4.4.– Sea el sistema homogéneo de ecuaciones lineales expresado vectorialmente por:

$$x_1\,\overline{a}'_1 + x_2\,\overline{a}'_2 + x_3\,\overline{a}'_3 + x_4\,\overline{a}'_4 = \overline{0}, \quad \text{siendo:}$$

$$\overline{a}'_1 = (1-\alpha,1,\alpha,\alpha)\,,\ \overline{a}'_2 = (\alpha,\alpha,1+\alpha,1)\,,\ \overline{a}'_3 = (\alpha,\alpha,0,1)\,,\ \overline{a}'_4 = (1,1,\alpha,\alpha) \in \mathbb{R}^4$$

Clasificar y resolver el sistema.

Ejercicio 4.5.– Resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x + y + 5z & = & 5 \\ x + y - 3z & = & 2 \\ x + y + 2z & = & 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x + y + z + t & = & 4 \\ x + y - z + t & = & 2 \\ 2x + 2y - z + t & = & 4 \end{array}\right.$$

Ejercicio 4.6.– Utilizando el método de Gauss clasificar y resolver el sistema de ecuaciones lineales expresado vectorialmente por:

$$x_1\,\overline{a}'_1 + x_2\,\overline{a}'_2 + x_3\,\overline{a}'_3 + x_4\,\overline{a}'_4 = \overline{b},$$

siendo:

$$\overline{a}'_1 = (1,-\alpha,1,1,1), \overline{a}'_2 = (1,1,-\alpha,1,1), \overline{a}'_3 = (1,1,1,-\alpha,1), \overline{a}'_4 = (1,1,1,1,-\alpha), \overline{b} = (1,2,3,4,5)$$

Ejercicio 4.7.– Clasificar el sistema y resolverlo para el caso $n = 0$, $m = 1$ utilizando la técnica de eliminación del método de Jordan.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + mx_2 + 2x_3 & = & 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 & = & -n \\ nx_1 + mx_2 - x_3 & = & -1 \end{array}\right.$$

4.2. Ejercicios propuestos (con solución)

Ejercicio 4.8.– Consideremos el sistema de ecuaciones lineales definido por:

$$x_1 \cdot \overline{a}'_1 + x_2 \cdot \overline{a}'_2 + x_3 \cdot \overline{a}'_3 = \overline{b}$$

siendo $\overline{a}'_1 = (\alpha, 1+\alpha, 1)$, $\overline{a}'_2 = (\alpha, 0, 1)$, $\overline{a}'_3 = (1, \alpha, \alpha)$ y $\overline{b} = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$.

a.– Clasificar el sistema según los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$.

b.– Resolver el sistema en los casos posibles.

Solución.–

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc} \alpha & \alpha & 1 \\ 1+\alpha & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha \end{array}\right| = -(\alpha-1)(\alpha+1)^2$$

$$\underline{\alpha \neq -1, 1}: \quad \mathrm{r}\,(A) = \dim S = 3 = n \quad \Longrightarrow \quad \text{S.H.C.D.} \quad \Longrightarrow \quad \underline{S_h = \{(0,0,0)\}}$$

$$\underline{\alpha = 1}: \quad \mathrm{r}\,(A) = \dim S = 2 < n \quad \Longrightarrow \quad \text{S.H.C.I.}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \underline{S_h = \{(a, a, -2a)/a \in \mathbb{R}\}}$$

$$\underline{\alpha = -1}: \quad \mathrm{r}\,(A) = \dim S = 2 < n \quad \Longrightarrow \quad \text{S.H.C.I.}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \underline{S_h = \{(a, -a, 0)/a \in \mathbb{R}\}}$$

Ejercicio 4.9.– Consideremos el sistema de ecuaciones lineales expresado matricialmente por

$$A \cdot X = B, \quad \text{donde } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Clasificar el sistema haciendo uso de la técnica de eliminación del método de Gauss. Si es posible, resolverlo.

Solución.–

$$AM = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_4-F_1}{\overset{F_3-F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{F_3+F_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{F_4-\frac{1}{2}F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{r}\,(A) = 3 < \mathrm{r}\,(AM) = 4 \quad \Longrightarrow \quad \text{S.I.}$$

Ejercicio 4.10.– Sea el sistema de ecuaciones lineales definido por:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 - \alpha x_3 & = & 4 \\ -\alpha x_1 + x_2 + \alpha x_3 & = & 0 \\ -x_1 + 2\alpha x_2 & = & \alpha + 2 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Clasificar el sistema según los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$. Resolver el sistema para $\alpha = 2$ utilizando la técnica de eliminación del método de Jordan.

Solución.–

$$\det B = (\alpha+3)(\alpha-2)^2$$

- $\underline{\alpha \neq -3, 2}$: $\quad \mathrm{r}\,(A) < \mathrm{r}\,(B) = 4 \quad$ S.I.

- $\underline{\alpha = -3}$: $\quad \mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,(B) = 3 = n \quad$ S.C.D.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & -6 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

- $\underline{\alpha = 2}$: $\quad \mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,(B) = 2 < n \quad$ S.C.I.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \qquad \left.\begin{array}{rcl} F_4 & = & -F_2 \\ F_3 & = & F_1 + F_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,(B) = 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{F_4-2F_1}{\overset{\substack{F_2+2F_1 \\ F_3+F_1}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & -2 & 8 \\ 0 & 7 & -2 & 8 \\ 0 & -7 & 2 & -8 \end{array}\right) \underset{F_4+F_2}{\overset{F_3+F_2}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{F_1-3/7F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -8/7 & 4/7 \\ 0 & 7 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\left(\tfrac{4}{7} + \tfrac{8}{7}a, \tfrac{8}{7} + \tfrac{2}{7}a, a\right) \quad \forall\, a \in \mathbb{R}}$$

Ejercicio 4.11.– Consideremos el sistema de ecuaciones lineales definido por:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a \\ 2b \\ 2a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

a.– Escribir en forma vectorial el sistema de ecuaciones.

Solución.–

$$x_1 \cdot \overline{a}'_1 + x_2 \cdot \overline{a}'_2 + x_3 \cdot \overline{a}'_3 + x_4 \cdot \overline{a}'_4 = \overline{b} \quad \text{con:}$$

$$\overline{a}'_1 = (0,1,1,1)\,,\ \overline{a}'_2 = (1,0,1,1)\,,\ \overline{a}'_3 = (1,1,0,1)\,,\ \overline{a}'_4 = (1,1,1,0)\,,\ \overline{b} = (a, 2b, 2a, b)$$

b.– Clasificar el sistema y resolverlo en los casos posibles.

Solución.–

$$\mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,(B) = 4 = n \quad \text{S.C.D.}$$

$$X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2b \\ 2a \\ b \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{(b, a-b, b-a, a)}$$

Ejercicio 4.12.– Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x + y + pz &= 0 \\ -y + qz &= -q \\ px + y + p^2 z - q - 1 &= 0 \end{aligned}$$

a.– Definir los vectores fila y columna asociados a la matriz ampliada del sistema.

b.– Clasificar el sistema según los valores de los parámetros reales p y q.

c.– Resolver el sistema en aquellos casos en los que hay más de una solución.

Solución.–

a.– Vectores fila: $\overline{a}_1 = (1, 1, p, 0), \overline{a}_2 = (0, -1, q, -q), \overline{a}_3 = (p, 1, p^2, q+1)$
Vectores columna: $\overline{a}'_1 = (1, 0, p), \overline{a}'_2 = (1, -1, 1), \overline{a}'_3 = (p, q, p^2), \overline{a}'_4 = (0, -q, q+1)$

b.–, c.– $\det A = q(p-1)$

- $\underline{p \neq 1 \ \wedge \ q \neq 0}$: $\mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,(B) = 3 = n$ S.C.D.

- $\underline{p = 1 \ \wedge \ q \neq -1}$: $\mathrm{r}\,(A) = 2 < \mathrm{r}\,(B) = 3$ S.I.

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & q & -q \\ 1 & 1 & 1 & q+1 \end{array}\right)$$

- $\underline{p = 1 \ \wedge \ q = -1}$: $\mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,(B) = 2 < 3$ S.C.I.

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad (1, -1-a, a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

- $\underline{q = 0}$: $\mathrm{r}\,(A) = 2 < \mathrm{r}\,(B) = 3$ S.I.

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & p & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ p & 1 & p^2 & 1 \end{array}\right)$$

Ejercicio 4.13.– Sea la matriz AM ampliada de un cierto sistema de ecuaciones lineales:

$$AM = \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha-1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1+\beta \end{array}\right)$$

a.– Clasificar dicho sistema según los valores de los parámetros reales α y β.

Solución.–

$$\det AM = -(\alpha-1)(\beta+2)$$

- $\alpha \neq 1 \ \wedge \ \beta \neq -2 \quad \mathrm{r}\,(AM) = 4 \quad \Longrightarrow \quad$ S.I.
- $\alpha = 1 \ \wedge \ \beta \neq -2 \quad \mathrm{r}\,(A) = 2 < \mathrm{r}\,(AM) = 3 \quad \Longrightarrow \quad$ S.I.
- $\alpha = 1 \ \wedge \ \beta = -2 \quad \mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,(AM) < 3 = n \quad \Longrightarrow \quad$ S.C.I.
- $\alpha \neq 1 \ \wedge \ \beta = -2 \quad \mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,(AM) = 3 = n \quad \Longrightarrow \quad$ S.C.D.

b.– Resolver por el método de Gauss en el caso $\alpha = 2$ y $\beta = -2$.

Solución.–

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{(-1, 1, 0)}$$

c.– Hallar AM^{-1} , para $\alpha = 2$ y $\beta = 0$.

Solución.–

$$AM^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

4.3. Cuestiones verdadero/falso

Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. Un sistema compatible determinado puede tener más incógnitas que ecuaciones.
2. Un sistema lineal homogéneo de 4 ecuaciones y 6 incógnitas siempre es compatible indeterminado.
3. No existen sistemas compatibles indeterminados con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.
4. Un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales con $m+1$ incógnitas siempre tiene infinitas soluciones.
5. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es una matriz invertible, el sistema $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene infinitas soluciones.

4.4. Cuestiones múltiple elección

En cada una de las preguntas del test, debe indicarse la o las respuestas correctas de las diferentes posibilidades existentes (puede haber una, más de una o ninguna). Los dos primeros fallos no se tendrán en cuenta, pero a partir del tercer fallo, por cada uno de ellos, se descontará la mitad de la puntuación de un acierto.

1. El sistema $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z & = & 5 \\ x-y+7z & = & 1 \\ x+15z & = & 7 \end{array}\right.$ es:

   ◯ S.C.D. con solución $\left(17,-8,\frac{5}{3}\right)$.

   ◯ S.C.D. con solución $\left(\frac{22}{3},-\frac{2}{3},-1\right)$.

   ◯ S.C.I.

   ◯ S.I.

   ◯ S.C.D. con solución $\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},1\right)$.

2. Sea $A \in \mathcal{R}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

   ◯ El sistema lineal homogéneo cuya matriz de coeficientes es A es siempre S.C.D.

   ◯ $\det A = 0$.

   ◯ $\mathrm{r}\,(A) = n$.

   ◯ Todos los sistemas lineales no homogéneos cuya matriz de coeficientes es A siempre tienen una única solución.

3. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales que tiene al menos dos soluciones linealmente independientes.

   ◯ $\mathrm{r}\,(A) \leqslant n$ y puede ser $\mathrm{r}\,(A) = n$.

   ◯ $\mathrm{r}\,(A) \leqslant n-1$ y puede ser $\mathrm{r}\,(A) = n-1$.

   ◯ $\mathrm{r}\,(A) \leqslant n-2$ y puede ser $\mathrm{r}\,(A) = n-2$.

   ◯ $\mathrm{r}\,(AM) < n$ siendo AM la matriz ampliada del sistema.

4. Consideremos el sistema $\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 & = & 1 \\ x_3+x_4+x_5 & = & 2 \\ x_5 & = & 3 \end{array}\right.$

   ◯ El conjunto de las soluciones depende de un parámetro.

   ◯ El sistema es incompatible.

   ◯ El conjunto de las soluciones depende de dos parámetros.

   ◯ El rango de la matriz de coeficientes del sistema es 3.

   ◯ El conjunto de las soluciones depende de tres parámetros.

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ la matriz de coeficientes de un sistema lineal homogéneo.

   ◯ El sistema tiene más de una solución si y sólo si $t \neq 2$.

   ◯ $\mathrm{r}\,(A) = 3 \iff t \neq 1$.

   ◯ El conjunto de las soluciones del sistema depende de un único parámetro si y sólo si $t \neq 1$.

   ◯ El sistema siempre tiene solución.

   ◯ A es invertible si y sólo si $t \neq 1$.

5. Ejercicios unidad temática 5

5.1. Ejercicios a resolver en clase

Ejercicio 5.1.– **1.**– Consideremos los vectores $\overline{u}_1 = (-1, 1, 1)$ y $\overline{u}_2 = (0, -1, 2)$ del $\mathbb{R}$–espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Se pide:

a.– Determinar la combinación lineal que permite expresar el vector de $\mathbb{R}^3$ $\overline{x} = (-2, 5, -4)$ en función de los vectores $\overline{u}_1$ y $\overline{u}_2$.

b.– Demostrar que $\overline{y} = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ no es combinación lineal de $\overline{u}_1$ y $\overline{u}_2$.

c.– Hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overline{z} = (\lambda, 3, 0)$ sea combinación lineal de $\overline{u}_1$ y $\overline{u}_2$ e indicar los coeficientes de la combinación lineal cuando ésta exista.

2.– Sea el $\mathbb{R}$–espacio vectorial $\mathcal{P}_2$:

a.– Demostrar que el polinomio $r(x) = 3\,x^2 + 1$ no es combinación lineal de los polinomios $p(x) = 1$ y $q(x) = x$.

b.– Hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el polinomio $p(x) = 3\,x^2 + \lambda$ sea combinación lineal de $q_1(x) = x^2 + 1$ y $q_2(x) = x - 1$.

Ejercicio 5.2.– Indicar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$. Hallar un sistema de generadores en caso afirmativo. Hallar también una base de aquellos subconjuntos que sean subespacios vectoriales.

$$\begin{array}{l}
S_1 = \{(x, y, z)/x + y = 0 \vee x - y = z\} \\
S_2 = \{(x, y, z)/x, y, z \in \mathbb{Z}\} \\
S_3 = \{(0, a, b)/a, b \in \mathbb{R}\} \\
S_4 = \{(0, a, 1)/a \in \mathbb{R}\} \\
S_5 = \{(0, a, 0)/a \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \geq -5\} \\
S_6 = \{(x, y, z)/x + y = 0 \wedge x - y = z\} \\
S_7 = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 = 2x_2 + x_3\} \\
S_8 = \{(x_1, x_2, x_3)/2x_1 + x_2 = 3x_1 + x_3 = 0\} \\
S_9 = \{(1, m, n)/m, n \in \mathbb{R}\}
\end{array}$$

Ejercicio 5.3.– Sea el $\mathbb{R}$–e.v $\mathcal{P}_3$. Demostrar que

$$S = \{p(x) \in \mathcal{P}_3/p(1) = p(-1) \ \wedge \ p'(1) = 0\}$$

es subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3$ y hallar un sistema de generadores de S.

Ejercicio 5.4.– A.– Indicar cuáles de los siguientes sistemas de vectores son libres o ligados en $\mathbb{R}^3$ (según los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ cuando sea pertinente). Si el sistema es ligado dar una combinación lineal nula con coeficientes no nulos.

$$\begin{array}{l}
F_1 = \{(1, 0, 2), (0, -1, 1), (3, 1, 1)\} \\
F_2 = \{(-1, 1, \alpha), (0, \alpha, 0), (1, 1, 0)\}
\end{array}$$

B.– Se pide lo mismo en el espacio vectorial $\mathcal{P}_2$ para los sistemas:

$$\begin{array}{l}
G_1 = \{p_1(x) = 2\,x^2\,,\ p_2(x) = x - 1\} \\
G_2 = \{q_1(x) = -2\,x + 2\,,\ q_2(x) = x - 1\}
\end{array}$$

Ejercicio 5.5.– Indicar una base de los subespacios vectoriales de los ejercicios 5.2 y 5.3.

Ejercicio 5.6.– Consideremos el subespacio vectorial real $\mathcal{P}_2$.

a.– Demostrar que
$$B = \{e_1(x) = x^2 + x + 1\,,\ e_2(x) = x^2 + x\,,\ e_3(x) = x^2\}$$
es base de $\mathcal{P}_2$.

b.– Hallar $\alpha \in \mathbb{R}$ para que
$$B' = \{(\overline{u}_1 = (\alpha, 1, 0)\,,\ \overline{u}_2 = (0, 0, \alpha + 2)\,,\ \overline{u}_3 = (1, 1, 1)\} \quad \text{sea base de } \mathbb{R}^3$$

c.– Determinar una base del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ dado por $\mathcal{L}(F)$ siendo
$$F = \{\overline{u}_1 = (1, 0, 1), \overline{u}_2 = (2, 0, 2), \overline{u}_3 = (1, 0, 2), \overline{u}_4 = (2, 0, 1)\}$$

Ejercicio 5.7.– Sea el subconjunto del $\mathbb{R}$–espacio vectorial $\mathbb{R}^4$:
$$S = \{\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 - x_4 = x_2 + x_3 = 0\}$$

a.– Demostrar que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

b.– Hallar una base B y la dimensión de S.

c.– Probar que $\overline{s} = (1, 2, -2, 1) \in S$ y que $\overline{t} = (2, -1, 1, -1) \notin S$.

d.- Hallar las coordenadas de $\overline{s}$ en la base B de S.

e.– Completar la base B de S hasta obtener una base B^* de $\mathbb{R}^4$ y hallar las coordenadas de $\overline{t}$ en B^*.

f.– Hallar un sistema libre F de S que no sea base de S.

Ejercicio 5.8.– Sea el $\mathbb{R}$–espacio vectorial $\mathcal{P}_3$ y el subconjunto:
$$S = \{p(x) \in \mathcal{P}_3 \,/\, p'''(0) = 0 \ \wedge\ p(1) = 0\}$$

a.– Demostrar que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3$, detallando una base B y la dimensión de S.

b.– Hallar una base B' de S distinta a la base B hallada en el apartado anterior.

c.– Completar la base B de S hasta obtener una base B^* de $\mathcal{P}_3$.

d.– Dar un subconjunto T de $\mathcal{P}_3$ que no sea subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3$. Justificar la respuesta.

e.– Hallar un sistema generador de S que no sea un sistema libre. Justificar la respuesta.

Ejercicio 5.9.– Hallar el rango de los siguientes sistemas de vectores:
$$F_1 = \{\overline{u}_1 = (1, 0, -1, 1), \overline{u}_2 = (2, 0, 0, 0), \overline{u}_3 = (-2, 0, -2, 2)\} \subset \mathbb{R}^4$$
$$F_2 = \{p_1(x) = x^2 + 1, p_2(x) = 2\,x^2, p_3(x) = 3\,x^2 + 1, p_4(x) = 1\} \subset \mathcal{P}_2$$
Encontrar una base $B_i\,(i = 1, 2)$ para cada uno de los subespacios vectoriales $\mathcal{L}(F_i)\,(i = 1, 2)$ y prolongar estas bases hasta conseguir dos bases B_1^* y B_2^* de $\mathbb{R}^4$ y de $\mathcal{P}_2$ respectivamente.

Ejercicio 5.10.– En el espacio vectorial real:
$$\mathcal{P}_3 = \{ax^3 + bx^2 + cx + d/a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$
consideremos los siguientes subconjuntos:
$$\begin{aligned} S = &\ \ \{p(x)/p(-1) = 0\} \\ T = &\ \ \{p(x) = ax^3 + bx^2 + (a + b)x + 2b/a, b \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

a.– Demostrar que S y T son subespacios vectoriales de $\mathcal{P}_3$ y hallar una base para cada uno de estos subespacios.

b.– Comprobar que $S \cup T$ no es subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3$.

c.– Encontrar una base del subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3$, $S \cap T$. ¿Cuál es la dimensión de $S \cap T$?

d.– Prolongar la base del subespacio vectorial $S \cap T$ encontrada en el apartado anterior hasta obtener una base B^* de $\mathcal{P}_3$. Hallar las coordenadas de los polinomios de las bases obtenidas para S y T en la base B^*.

Ejercicio 5.11.– Sean las matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a.– Estudiar la dependencia e independencia lineal de A_1, A_2, A_3 según los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$.

b.– Calcular $\mathrm{r}\,(\{A_1, A_2, A_3\})$ según los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$.

c.– Hallar una base B y la dimensión del subespacio $S = \mathcal{L}\,(\{A_1, A_2, A_3\})$ según los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$.

d.– Ampliar la base de S hasta obtener una base B^* de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, para $\alpha = 1$.

Ejercicio 5.12.– Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

a.– Hallar una base B y la dimensión del subespacio vectorial:

$$S = \{X \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) / A \cdot X = (0)_{2\times 2}\}$$

b.–, d.– Hallar un s.g. G de S que no sea base de S. Calcular $\mathrm{r}\,(G)$.

c.–, d.– Hallar un s. libre F de S que no sea base de S. Calcular $\mathrm{r}\,(F)$.

e.– Ampliar la base B de S hasta obtener una base B^* de $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

Ejercicio 5.13.– Calcular el rango de las siguientes matrices (según el valor del parámetro real $m \in \mathbb{R}$ en el caso de las matrices B, C y D).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & m+1 \\ 1 & 1 & -m & m+1 \\ m & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m & 1 \\ m & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & m & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad E = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Utilizando la información obtenida al calcular el rango de las matrices del problema, responder a las siguientes cuestiones:

a.– Calcular el rango de la familia F de los vectores fila de las matrices A, B y E.

b.– ¿Cuál es la dimensión del subespacio vectorial engendrado por F ? ¿Por qué?

c.– Indicar una base de $\mathcal{L}(F)$ y ampliar esta base hasta conseguir una base de $\mathbb{R}^4$ en los casos de las matrices A y B y $\mathbb{R}^5$ es el caso de la matriz E.

d.– ¿Para qué valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$ los vectores fila de D forman base de $\mathbb{R}^4$? Razonar la respuesta.

Ejercicio 5.14.– Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y los vectores de $\mathbb{R}^4$ siguientes:

$$\overline{u}_1 = (2, 1, \lambda, 2) \quad , \quad \overline{u}_2 = (5, 3, 2\lambda + 2, \lambda) \quad , \quad \overline{u}_3 = (\lambda, 0, \lambda, 9)$$

a.– Calcular $\mathrm{r}(F)$, siendo $F = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$, según los distintos valores de $\lambda \in \mathbb{R}$.

b.– Hallar para $\lambda = 3$ una base B_1 de $\mathcal{L}(F)$. Ampliar la base B_1 de $\mathcal{L}(F)$ hasta conseguir una base B_1^* de $\mathbb{R}^4$.

c.– Hallar para $\lambda = 0$ una base B_2 de $\mathcal{L}(F)$. Ampliar la base B_2 de $\mathcal{L}(F)$ hasta conseguir una base B_2^* de $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 5.15.– Resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y + 5z & = & 5 \\ x + y - 3z & = & 2 \\ x + y + 2z & = & 2 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z + t & = & 4 \\ x + y - z + t & = & 2 \\ 2x + 2y - z + t & = & 4 \end{array} \right.$$

Resuelve las siguientes cuestiones, justificando las respuestas:

a.– Estudiar la dependencia o independencia lineal de la familia de vectores:

$$F = \{\, \overline{u}_1 = (1, 1, 1, 1)\, , \overline{u}_2 = (1, 1, -1, 1)\, , \overline{u}_3 = (2, 2, -1, 1)\}$$

b.– Dar una base B_1 del subespacio $S = \mathcal{L}(F)$.

c.– Ampliar la base B_1 de S hasta conseguir una base B_1^* de $\mathbb{R}^4$.

d.– ¿Son L.I. los vectores $\overline{v}_1 = (1, 1, 1, 1, 4)$, $\overline{v}_2 = (1, 1, -1, 1, 2)$, $\overline{v}_3 = (2, 2, -1, 1, 4)$?

e.– Dar una base B_2 del subespacio $T = \mathcal{L}(\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\})$.

f.– Ampliar la base B_2 de T del apartado anterior para conseguir una base B_2^* de $\mathbb{R}^5$.

g.– ¿Es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ el subconjunto $W = \{(a, 2 - a, 1, 1)/a \in \mathbb{R}\}$?

Ejercicio 5.16.– Sea el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$:

$$S = \mathcal{L}(\{\overline{a}_1 = (1 + \alpha, 1, \alpha - 1, \alpha), \overline{a}_2 = (\alpha, 0, 1 - \alpha, 1), \overline{a}_3 = (\alpha, 1, \alpha - 1, 0)\})$$

a.– Hallar una base B y la dimensión de S , según los valores del parámetro α.

b.– Para $\alpha = 0$, completar la base B hasta obtener una base B^* de $\mathbb{R}^4$.

c.– Consideremos el sistema homogéneo:

$$x_1 \cdot \overline{a}_1 + x_2 \cdot \overline{a}_2 + x_3 \cdot \overline{a}_3 = \overline{0}$$

Discutir y resolver el sistema según los valores del parámetro α.

5.2. Ejercicios propuestos (con solución)

Ejercicio 5.17.– Sea el subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2$ definido por:

$$S = \{p(x) \in \mathcal{P}_2 / p(0) + p(1) = p'(0)\}$$

a.– Hallar una base de S y la dimensión de S.

Solución.–

$$S = \left\{ -2c\,x^2 + b\,x + c \,/\, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$B = \left\{ p_1(x) = x \,,\, p_2(x) = -2x^2 + 1 \right\} \quad , \quad \dim S = 2.$$

b.– Ampliar la base de S hasta obtener una base B^* de $\mathcal{P}_2$.

Solución.– $\quad B^* = \left\{ p_1(x) = x \,,\, p_2(x) = -2x^2 + 1 \,,\, p_3(x) = 1 \right\}$

c.– Hallar un sistema generador de S que no sea base de S.

Solución.– $\quad G = \{ p_1(x) \,,\, p_2(x) \,,\, p_1(x) + p_2(x) \}$

d.– Hallar un sistema libre de S que no sea base de S.

Solución.– $\quad F = \{ p_1(x) \}$

Ejercicio 5.18.– Consideremos el siguiente subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 - x_4 = 0 \wedge x_2 - x_4 = x_3\}$$

a.– Obtener dos bases distintas B_1 y B_2 de S y hallar la dimensión de S.

Solución.–

$$S = \{ (a, b, b-a, a) \;/\; a, b \in \mathbb{R} \}$$

$$\left.\begin{array}{ll} B_1 = & \{\overline{u}_1 = (1,0,-1,1) \,,\, \overline{u}_2 = (0,1,1,0)\} \\ B_2 = & \{\overline{v}_1 = (1,1,0,1) \,,\, \overline{v}_2 = (0,1,1,0)\} \end{array}\right\} \quad , \quad \dim S = 2.$$

b.– Sea $F = B_1 \cup B_2$. ¿Es F libre? ¿Es F sistema generador de S ? Hallar $\mathrm{r}\,(F)$.

Solución.– $\quad F$ s. ligado $\quad , \quad F$ s. generador de $S \quad , \quad \mathrm{r}\,(F) = 2$

c.– Completar la base B_1 hasta obtener una base B^* de $\mathbb{R}^4$.

Solución.– $\quad B^* = \{ \overline{u}_1 \,,\, \overline{u}_2 \,,\, \overline{e}_3 \,,\, \overline{e}_4 \}$

Ejercicio 5.19.– Indicar razonadamente si son verdaderos o falsos los siguientes enunciados:

a.– Si $G = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_m\}$ es un sistema generador de un subespacio vectorial S, entonces $\dim S = m$.

Solución.– No necesariamente cierto: Si G es además un sistema libre, entonces es cierto.

Si G es un sistema ligado, entonces: $\dim S < m$.
En general, $\dim S \leq m$ y la igualdad sólo se cumple cuando el sistema generador G de S es además un sistema libre.

b.– Los polinomios $\{p_1(x) = x, p_2(x) = 1 + x, p_3(x) = 1 + x + x^2\}$ forman una base del espacio vectorial real $\mathcal{P}_2$.

Solución.– Verdadero

Ejercicio 5.19.– Indicar razonadamente si son verdaderos o falsos los siguientes enunciados:

a.– El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ de la forma $(x_1, x_2, 1)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Solución.– Falso: $\overline{0} \notin H = \{\, (x_1, x_2, 1) \,/\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \,\}$.

b.– Si $F = \{\overline{x} = (1, 2), \overline{y} = (2, 3)\}$ es un sistema generador de $\mathbb{R}^2$, entonces $G = \{\overline{x} = (1, 2), \overline{y} = (2, 3), \overline{z} = (-2, -3)\}$ es también un sistema generador de $\mathbb{R}^2$.

Solución.– Verdadero: $\overline{z} = -\overline{y}$.

c.– Si S es un subespacio vectorial propio de $\mathbb{R}^3$ es posible encontrar 3 vectores linealmente independientes de S.

Solución.– Falso: Si S es subespacio vectorial propio de $\mathbb{R}^3 \implies \dim S = 1 \vee 2$, luego como mucho habrá 2 vectores l.i. en S.

Ejercicio 5.20.– Justificar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales del correspondiente espacio vectorial real, indicando una base en caso de que sean subespacios.

$$\begin{array}{l} S_1 = \{p(x) \in \mathcal{P}_3 / p(x) = x^3 + ax + b\} \\ S_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 \cdot x_2 = 0\} \\ S_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_3 \leq 0\} \end{array}$$

Solución.–

- S_1 no es subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3$ pues $0 \notin S_1$
- S_2 no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}_3$ pues:
  $$\overline{x} = (0, 1, 1) \in S_2 \quad ; \quad \overline{y} = (1, 0, 0) \in S_2 \quad ; \quad \overline{x} + \overline{y} = (1, 1, 1) \notin S_2$$
- S_3 no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}_3$ pues:
  $$\overline{x} = (-1, 0, 0) \in S_3 \quad ; \quad -2 \cdot \overline{x} = (2, 0, 0) \notin S_3$$

Ejercicio 5.21.– Sea
$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_3 = 0 \,\wedge\, x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$$

a.– Demostrar que S es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$, hallando una base B de S y su dimensión.

Solución.–
$$S = \{\, (a, b, 0, -a - b) \;/\; a, b \in \mathbb{R} \,\}$$
$$B = \{\overline{u}_1 = (1, 0, 0, -1)\,,\, \overline{u}_2 = (0, 1, 0, -1)\} \quad , \quad \dim S = 2.$$

b.– Completar la base B de S hasta obtener una base B^* de $\mathbb{R}^4$.

Solución.– $\quad B^* = \{\, \overline{u}_1 \,,\, \overline{u}_2 \,,\, \overline{e}_3 = (0,0,1,0) \,,\, \overline{e}_4 = (0,0,0,1) \,\}$

Ejercicio 5.22.– En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios:

$$\begin{array}{l} S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 = x_2\} \\ T = \mathcal{L}\left(\{(1,1,2,1)\,,\,(2,0,-1,1)\}\right) \end{array}$$

Hallar una base y la dimensión de cada uno de los subespacios siguientes: S , T , $S \cap T$. Prolongar cada una de las bases hasta conseguir tres bases de $\mathbb{R}^4$.

Solución.–

- $B_S = \{(1,1,0,0)\,,\,(0,0,1,0)\,,\,(0,0,0,1)\}$
  $B_S^* = \{(1,1,0,0)\,,\,(0,0,1,0)\,,\,(0,0,0,1)\,,\,\overline{e}_1\}$

- $B_T = \{(1,1,2,1)\,,\,(2,0,1,-1)\}$
  $B_T^* = \{(1,1,2,1)\,,\,(2,0,1,-1)\,,\,\overline{e}_3\,,\,\overline{e}_4\}$

- $S \cap T = \{(a,a,2a,a)/a \in \mathbb{R}\}$
  $B_{S\cap T} = \{(1,1,2,1)\}$
  $B_{S\cap T}^* = \{(1,1,2,1)\,,\,\overline{e}_2\,,\,\overline{e}_3\,,\,\overline{e}_4\}$

Ejercicio 5.23.– Sea el subconjunto de $\mathcal{P}_3$:

$$S = \left\{ p(x) \in \mathcal{P}_3 / p(x) \text{ es divisible por } x^2+1 \right\}$$

a.– Demostrar que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3$, detallando una base B y la dimensión de S.

Solución.–

$$S = \left\{\, (ax+b)\cdot\left(x^2+1\right) \;/\; a,b \in \mathbb{R} \,\right\}$$

$$B = \left\{\, p_1(x) = x^3 + x \,,\, p_2(x) = x^2+1 \,\right\} \quad , \quad \dim S = 2.$$

b.– Completar la base B de S hasta obtener una base B^* de $\mathcal{P}_3$.

Solución.– $\quad B^* = \left\{\, p_1(x) = x^3 + x \,,\, p_2(x) = x^2 + 1 \,,\, q_1(x) = x^3 \,,\, q_2(x) = x^2 \,\right\}$

c.– ¿El polinomio $w(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \in S$? ¿Y $r(x) = x^4 + x^3 - 1 \in S$?

d.– ¿Cuáles son las coordenadas de $w(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \in S$ en la base B de S ?

Solución.– $\quad w(x) = p_1(x) + p_2(x) \in S \quad , \quad r(x) \notin \mathcal{P}_3 \quad \Longrightarrow \quad r(x) \notin S$

e.– Buscar un subconjunto infinito T de $\mathcal{P}_3$ que no sea subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3$. Justificar la respuesta.

Solución.– Por ejemplo:

$$T = \left\{\, a\,x^3 + 1 \,/\, a \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{pues} \quad q(x) \equiv 0 \notin T.$$

f.– ¿Cuál es el rango del siguiente conjunto de polinomios

$$T = \left\{1, x, x^2+1, x^3+x, x^2, x^3+1\right\}\,?$$

¿Qué puedes decir sobre T?

Solución.–

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,(T) = 4$$

Como $\mathrm{r}\,(T) = 4 = \dim \mathcal{P}_3$, entonces T es sistema generador de $\mathcal{P}_3$, pero no es base de $\mathcal{P}_3$, pues es s. ligado.

Ejercicio 5.24.– Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{P}_3 = \left\{p(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d / a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$ y consideremos el siguiente subespacio vectorial :

$$S = \{p(x) \in \mathcal{P}_3 / p(-1) + p'''(-1) = 0 \wedge p(1) + p'''(1) = 0\}$$

a.– Hallar una base B de S y determinar la dimensión de S.

Solución.–

$$S = \left\{\, ax^3 + bx^2 - ax - 6a - b \,/\, a, b \in \mathbb{R} \,\right\}$$
$$B = \left\{\, p_1(x) = x^3 - x - 6 \,,\, p_2(x) = x^2 - 1 \,\right\} \quad , \quad \dim S = 2.$$

b.– Prolongar la base B de S hasta obtener una base B^* de $\mathcal{P}_3$.

Solución.– $\quad B^* = \left\{\, p_1(x) = x^3 - x - 6 \,,\, p_2(x) = x^2 - 1 \,,\, q_1(x) = x \,,\, q_2(x) = 1 \,\right\}$

c.– Encontrar un subespacio vectorial T de S tal que $\dim T = 1$, indicando una base del mismo.

Solución.– $\quad T = \mathcal{L}\left(\{x^3 - x - 6\}\right) \quad , \quad B' = \left\{\, p_1(x) = x^3 - x - 6\right\}$

Ejercicio 5.25.– Consideremos el subconjunto del espacio vectorial real $\mathcal{P}_3$:

$$S = \left\{p(x) \in \mathcal{P}_3 / \int_{-1}^{1} p(x)dx = 0\right\}$$

a.– Comprobar que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3$.

b.– Hallar una base B de S ¿Cuál es la dimensión de S?

Solución.–

$$S = \{ax^3 - 3dx^2 + cx + d / a, c, d \in \mathbb{R}\}$$
$$B_S = \{x^3, -3x^2 + 1, x\} \quad ; \quad \dim S = 3$$

c.– Prolongar la base B de S hasta encontrar una base B^* de $\mathcal{P}_3$.

Solución.– $\quad B^* = \{x^3, -3x^2 + 1, x, 1\}$

Ejercicio 5.26.– Una compañía almacena tres mezclas básicas A, B y C. Las cantidades se miden en gramos y cada “unidad” de mezcla pesa 60 gramos. Pueden formularse mezclas especiales de argamasa efectuando combinaciones de las tres mezclas básicas. Por ello, las mezclas especiales posibles pertenecen al espacio generado por los tres vectores que representan las mezclas básicas. La composición de éstas es:

Cemento	20	18	12
Agua	10	10	10
Arena	20	25	15
Grava	10	5	15
Tobas	0	2	8

a.– Razonar si es posible hacer una mezcla que consiste en 1000 gramos de cemento, 200 gramos de agua, 1000 gramos de arena, 500 gramos de grava y 300 de tobas. En caso afirmativo decir cuántas unidades de cada mezcla básica A, B y C se necesitan para formular la mezcla especial.

Solución.–

$$\begin{aligned} \overline{a} &= (20, 10, 20, 10, 0) \\ \overline{b} &= (18, 10, 25, 5, 2) \\ \overline{c} &= (12, 10, 15, 15, 8) \\ \overline{m} &= (1000, 200, 1000, 500, 300) \\ \overline{m} &= \alpha_1 \cdot \overline{a} + \alpha_2 \cdot \overline{b} + \alpha_3 \cdot \overline{c} \quad \underline{\text{sistema incompatible}} \end{aligned}$$

b.– Supóngase que se desean hacer 5400 gramos de argamasa de manera que contenga 1350 gramos de cemento, 1675 gramos de arena y 1025 gramos de grava. Si la razón de agua a cemento es de 2 a 3, decir qué cantidad de tobas debe utilizarse para hacer 5400 gramos de argamasa. En caso de que esta masa se pueda formular como una mezcla especial, decir cuántas unidades de las mezclas A, B y C se necesitarán para formular dicha mezcla especial.

Solución.–

$$\begin{aligned} \overline{a} &= (20, 10, 20, 10, 0) \\ \overline{b} &= (18, 10, 25, 5, 2) \\ \overline{c} &= (12, 10, 15, 15, 8) \\ \overline{m} &= (1350, 900, 1675, 1025, 450) \\ \overline{m} &= \alpha_1 \cdot \overline{a} + \alpha_2 \cdot \overline{b} + \alpha_3 \cdot \overline{c} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = 15\,,\ \alpha_2 = 25\,,\ \alpha_3 = 50 \end{aligned}$$

5.3. Cuestiones verdadero/falso

Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. Un conjunto de tres vectores $\{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\}$ es linealmente independiente si ninguno de los tres vectores es proporcional a ninguno de los otros dos vectores.
2. Si $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n\}$ son vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real V, entonces $\dim V \geq n$.
3. Si $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n\}$ y $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_m\}$ son dos sistemas generadores distintos de un mismo subespacio vectorial real S, entonces $n = m$.
4. Todo sistema libre de un espacio vectorial real V, es base de V.
5. Si $S = \{(a + c, a - b, b + c, 0)/a, b, c \in \mathbb{R}\}$, entonces $\dim S = 3$.

5.4. Cuestiones múltiple elección

En cada una de las preguntas del test, debe indicarse la o las respuestas correctas de las diferentes posibilidades existentes (puede haber una, más de una o ninguna). Los dos primeros fallos no se tendrán en cuenta, pero a partir del tercer fallo, por cada uno de ellos, se descontará la mitad de la puntuación de un acierto.

1. Sea $G = \{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_p\}$ un sistema ligado de vectores de un espacio vectorial real V.

   ◯ Cualquier vector de G se puede poner como combinación lineal de los restantes vectores de G.

   ◯ G contiene alguna base de V.

   ◯ $\dim \mathcal{L}(G) < p$.

   ◯ G se puede completar a una base de V.

2. En el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales, el conjunto de los polinomios que admiten el 1 como raíz,

   ◯ no es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2$,

   ◯ es un subespacio de $\mathcal{P}_2$ de dimensión 1,

   ◯ es un subespacio de $\mathcal{P}_2$ de dimensión 2,

   ◯ es un subespacio de $\mathcal{P}_2$ de dimensión 3.

3. Sea $S = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3, \overline{u}_4\}$ un sistema ligado de vectores de $\mathbb{R}^3$. Entonces, el conjunto $B = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ si $\overline{u}_4 \in \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}\right)$.

   ◯ Falso, el enunciado sería cierto si S fuera también un sistema generador de $\mathbb{R}^3$.

   ◯ Falso, los tres vectores $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$ pueden seguir siendo linealmente dependientes.

   ◯ Verdadero, el procedimiento para construir una base es eliminar el vector que sea combinación lineal de los demás.

   ◯ Verdadero, pues $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

4. Sean $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3, \overline{u}_4\}$ una base de un espacio vectorial V y consideremos los vectores

$$\begin{aligned}
\overline{v}_1 &= \overline{u}_1 \\
\overline{v}_2 &= \overline{u}_1 - \overline{u}_2 \\
\overline{v}_3 &= \overline{u}_1 - \overline{u}_2 + \overline{u}_3 \\
\overline{u}_4 &= \overline{u}_1 - \overline{u}_2 + \overline{u}_3 + \overline{u}_4
\end{aligned}$$

   ◯ $\dim \mathcal{L}(\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}) = 3$.

   ◯ $\mathcal{L}(\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}) = \mathcal{L}(\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\})$.

   ◯ Los vectores $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4$ generan V.

   ◯ Los vectores $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4$ son linealmente dependientes.

5. Sea V un espacio vectorial real de dimensión n y sean $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_r \in V$.

   ◯ $r > n \implies \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_r\}$ es un sistema ligado.

   ◯ $r \geq n \implies \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_r\}$ es un sistema generador de V.

   ◯ $r < n \implies \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_r\}$ es un sistema libre.

   ◯ $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_r\}$ sistema generador de $V \implies r \geq n$.

6. Ejercicios unidad temática 6

6.1. Ejercicios a resolver en clase

Ejercicio 6.1.– Indicar cuáles de las siguientes aplicaciones son productos escalares sobre el correspondiente espacio vectorial V. En caso afirmativo, obtener la matriz de Gram en la base canónica del correspondiente espacio vectorial:

a.– $\left\{ \begin{array}{l} f_1 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \text{ definido por:} \\ f_1(\overline{x}, \overline{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 \end{array} \right.$

b.– $\left\{ \begin{array}{l} f_2 : \mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R} \text{ definido por:} \\ f_2(p(x), q(x)) = aa' + bb' + cc' \end{array} \right.$

c.– $\left\{ \begin{array}{l} f_3 : \mathcal{M}_{2\times 2} \times \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R} \text{ definido por:} \\ f_3(A, B) = \text{traza}\left(B^T \cdot A\right) \end{array} \right.$

d.– $\left\{ \begin{array}{l} f_4 : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \text{ definido por:} \\ f_4(\overline{x}, \overline{y}) = x_1y_1 + x_2(y_1 + y_2) + (x_1 + x_3)(y_1 + y_3) \end{array} \right.$

e.– $\left\{ \begin{array}{l} f_5 : \mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R} \text{ definido por:} \\ f_5(p(x), q(x)) = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) \end{array} \right.$

Ejercicio 6.2.–

1.– Sea el espacio vectorial euclídeo usual $\mathbb{R}^3$

a.– Hallar la norma del vector $\overline{x} = (1, 2, -1)$.

b.– Calcular el ángulo formado por los vectores $\overline{y} = (1, 0, -1)$ y $\overline{z} = (-1, 1, 1)$.

c.– Determinar la distancia entre los vectores del apartado anterior.

2.– Se pide lo mismo siendo el producto escalar en $\mathbb{R}^3$:

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 \quad \forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^3$$

Ejercicio 6.3.– Sea el e.v. euclídeo $(\mathcal{P}_2, \langle\ ,\ \rangle)$, con el producto escalar usual en $\mathcal{P}_2$:

$$\begin{array}{c} \langle p(x), q(x) \rangle = a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c'\,, \text{ siendo:} \\ p(x) = ax^2 + bx + c \quad , \quad q(x) = a'x^2 + b'x + c' \end{array}$$

a.– Calcular el ángulo formado por los polinomios $p_1(x) = 1$ y $p_2(x) = x + 1$.

b.– Calcular la norma del polinomio $v(x) = x^2 + 2x - 1$.

c.– Calcular la distancia entre los polinomios $q_1(x) = x^2 + x + 1$ y $q_2(x) = x^2 - 1$.

Ejercicio 6.4.–

a.– Consideremos el e.v. $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual. Hallar la expresión matricial de dicho producto escalar respecto de la base:

$$B = \{\overline{u}_1 = (1, 1, 0), \overline{u}_2 = (0, 1, 1), \overline{u}_3 = (0, 0, 1)\}$$

b.– Consideremos el e.v. $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar definido por la matriz de Gram

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

respecto de la base:

$$B = \{\overline{u}_1 = (1,0,1), \overline{u}_2 = (0,1,0), \overline{u}_3 = (0,1,1)\}$$

Hallar la expresión general de dicho producto escalar

Ejercicio 6.5.– Sea el e.v. euclídeo $\left(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle\right)$ con el producto escalar:

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = x_1 y_1 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)$$

a.– Hallar una base ortogonal B_O de $\mathbb{R}^3$.

b.– Hallar una base ortonormal B_{ON} de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 6.6.– Sea el subespacio vectorial

$$S = \left\{A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) / A = -A^T\right\}$$

contenido en el espacio euclídeo $(\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}), \langle\ ,\ \rangle)$ donde el producto escalar es el usual, es decir:

$$\langle A, B \rangle = \text{traza}\left(B^T \cdot A\right)$$

a.– Hallar la expresión general del producto escalar en la base canónica de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

b.– Hallar una base ortogonal B_O y una base ortonormal B_{ON} del subespacio vectorial S.

c.– Hallar la mejor aproximación de la matriz

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

en el subespacio S. Calcular la norma del error cometido.

Ejercicio 6.7.– a.– Utilizando el producto escalar usual, encontrar la mejor aproximación $\overline{w}$ de $\overline{v} = (1,1,1,1) \in \mathbb{R}^4$ es el subespacio

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 - x_4 = 0 \wedge x_2 - x_4 = x_3\}$$

Calcular también la norma del error cometido.

b.– Utilizando el p.e. usual, encontrar la mejor aproximación $\overline{w}$ de $\overline{v} = (0, 1/2, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ en el subespacio

$$S = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1 = (-1,0,1,1), \overline{u}_2 = (1,1,1,1)\}\right)$$

Calcular también la norma del error cometido.

c.– Utilizando el producto escalar usual, ¿cuál es la combinación lineal $\overline{w}$ de $(1,2,-1)$ y $(1,0,1)$ que está más cerca de $\overline{v} = (2,1,1) \in \mathbb{R}^3$? Calcular la norma del error cometido.

Ejercicio 6.8.– a.– Utilizando el producto escalar usual en $\mathcal{C}_{[-1,1]}$:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x)\, dx$$

hallar $r(x) = ax^3 + bx^2 + cx \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$ que mejor se aproxima a la función

$$v(x) = 2 \quad \forall x \in [-1, 1] \qquad \big(v(x) \in \mathcal{C}_{[-1,1]}\big)$$

b.– Idem par $w(x) = 2x^2 - x$.

Ejercicio 6.9.– Resolver de forma aproximada el sistema de ecuaciones lineales dado por:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_3 & = & 1 \\ x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

Obtener el error que se comete.

Ejercicio 6.10.– a.– Comprobar que no hay ninguna recta que se ajuste a los siguientes datos:

$$\begin{array}{lll} y = 6 & \text{en} & x = 0 \\ y = 0 & \text{en} & x = 1 \\ y = -1 & \text{en} & x = 1 \\ y = 0 & \text{en} & x = 2 \end{array}$$

b.–Encontrar la ecuación de la recta $y = a\,x + b$ que más se aproxima a los datos anteriores.

6.2. Ejercicios propuestos (con solución)

Ejercicio 6.11.– Sea el espacio vectorial euclídeo $(\mathcal{P}_2\,, <\,,\,>)$ donde el producto escalar viene definido por:

$$\begin{array}{c} \langle p(x), q(x) \rangle = p(-1) \cdot q(-1) + p(0) \cdot q(0) + p(1) \cdot q(1) \\ \forall p(x) = ax^2 + bx + c \quad , \quad q(x) = a'x^2 + b'x + c' \end{array}$$

Calcular la matriz de Gram del producto escalar definido previamente respecto de la base canónica de $\mathcal{P}_2:\ B_C = \{x^2, x, 1\}$. Realizar el mismo cálculo respecto de la base de $\mathcal{P}_2$:

$$B = \big\{p_1(x) = x^3 - 1, p_2(x) = x^2 - x, p_3(x) = x^3 - x^2 - 1\big\}$$

Solución.–

$$G_{B_C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad G_B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 7 \\ -4 & 4 & -6 \\ 7 & -6 & 11 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6.12.– Consideremos el subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2$ definido por:

$$S = \{p(x) \in \mathcal{P}_2 / p(0) + p(1) = p'(0)\}$$

a.– Hallar una base B de S y determinar la dimensión de S.

Solución.–

$$B_S = \{p_1(x) = x, p_2(x) = -2x^2 + 1\} \qquad , \qquad \dim S = 2$$

b.– Ampliar la base B de S hasta obtener una base B^* de $\mathcal{P}_3$.

Solución.–

$$B^* = \{p_1(x) = x, p_2(x) = -2x^2 + 1, p_3(x) = 1\}$$

c.– Hallar un sistema generador de S que no sea base de S.

Solución.–

$$G = \{p_1(x) = x, p_2(x) = -2x^2 + 1, p_1(x) + p_2(x) = -2x^2 + x + 1\}$$

d.– Determinar la mejor aproximación $vp(x)$ del polinomio $p(x) = 1$ en S con el producto escalar en $\mathcal{P}_2$ definido por:

$$\langle p(x), q(x)\rangle = 2aa' + bb' + 3cc' + ac' + ca'$$
$$\forall p(x) = ax^2 + bx + c \quad , \quad q(x) = a'x^2 + b'x + c'$$

Solución.–

$$vp(x) = -\frac{2}{7}x^2 + \frac{1}{7}$$

e.– ¿Cuánto vale la norma del polinonio error $e(x) = vp(x) - p(x)$?

Solución.–

$$\|e(x)\| = \frac{\sqrt{140}}{7} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$$

Ejercicio 6.13.– Consideremos el siguiente subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3$:

$$S = \{p(x) \in \mathcal{P}_3 \,/\, p'''(0) = 0 \wedge p(1) = 0\}$$

a.– Hallar una base B de S y determinar la dimensión de S.

Solución.–

$$B_S = \{p_1(x) = x^2 - 1, p_2(x) = x - 1\} \qquad , \qquad \dim S = 2$$

b.– Ampliar la base B de S hasta obtener una base B^* de $\mathcal{P}_3$.

Solución.–

$$B^* = \{p_1(x) = x^2 - 1, p_2(x) = x - 1, p_3(x) = x^3, p_4(x) = 1\}$$

c.– Dar un subconjunto T de $\mathcal{P}_3$ que no sea subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3$. Justificar la respuesta.

Solución.–

$$T = \{x^2 - 1\} \qquad , \qquad \overline{0} \notin T$$

d.– Utilizando el producto escalar usual en $\mathcal{P}_3$ hallar la mejor aproximación $vr(x)$ de $r(x) = x^3 + 1$ en S.

Solución.–

$$vr(x) = -\frac{x^2}{3} - \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$$

e.– Calcular el valor de $e(x) = vr(x) - r(x)$.

Solución.–

$$\|e(x)\| = \frac{\sqrt{12}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

Ejercicio 6.14.– Consideremos el siguiente producto escalar en $\mathbb{R}^3$:

$$\langle \overline{x}, \overline{y}\rangle = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (x_1 + x_3)(y_1 + y_3) + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3) \quad \forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^3$$

a.– Calcular la matriz de Gram del producto escalar definido previamente respecto de la base canónica.

Solución.–

$$G_{B_C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b.– Calcular la matriz de Gram y la expresión matricial del producto escalar definido previamente respecto de la base de $\mathbb{R}^3$:

$$B = \{\overline{u}_1 = (1,0,1), \overline{u}_2 = (0,1,0), \overline{u}_3 = (0,-1,-1)\}$$

Solución.–

$$G_B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -5 \\ 2 & 2 & -3 \\ -5 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}}_{\overline{x} \text{ en } B_C} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 2 & -5 \\ 2 & 2 & -3 \\ -5 & -3 & 6 \end{pmatrix}}_{G_B} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{G_{B_C}} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{\overline{y} \text{ en } B_C}$$

c.– Hallar el ángulo formado por los vectores $\overline{x} = (1,-1,3)$ e $\overline{y} = (0,1,2)$ y la distancia entre ambos. ¿Son los vectores $\overline{x}$ y $\overline{y}$ ortogonales? Justifica la respuesta.

Solución.–

$$\cos\theta = \frac{\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle}{\|\overline{x}\| \cdot \|\overline{y}\|} = \frac{14}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{20}} \quad \Longrightarrow \quad \theta = 0.5796397 = 33.210911^\circ$$

$$d(\overline{x}, \overline{y}) = \|\overline{x} - \overline{y}\| = \|(1,-2,1)\| = \sqrt{6}$$

Como el ángulo que forman los vectores no es $\pi/2$ los vectores no son ortogonales.

Ejercicio 6.15.– Consideremos el siguiente subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_4 = x_2 - x_4 = x_3\}$$

a.– Hallar dos bases distintas B_1 y B_2 de S y determinar la dimensión de S.

Solución.–

$$\begin{array}{l} B_1 = \{(1,1,0,1), (0,0,1,-1)\} \\ B_2 = \{(1,1,1,0), (1,1,-1,2)\} \end{array} \qquad , \qquad \dim S = 2$$

b.– Sea $F = B_1 \cup B_2$. ¿Es F libre? ¿Es F s.g. de S? Hallar $\mathrm{r}(F)$.

Solución.–

$$F \text{ es ligado} \qquad ; \qquad F \text{ es s.g. de } S \qquad ; \qquad \mathrm{r}(F) = 2$$

c.– Prolongar B_1 y B_2 hasta obtener dos bases B_1^* y B_2^* de $\mathbb{R}^4$.

Solución.–

$$\begin{array}{l} B_1^* = \{(1,1,0,1), (0,0,1,-1), \overline{e}_2, \overline{e}_4\} \\ B_1^* = \{(1,1,1,0), (1,1,-1,2), \overline{e}_1, \overline{e}_2\} \end{array}$$

d.– Obtener a partir de B_1^* una base ortogonal de $\mathbb{R}^4$.

Solución.–

$$B_O = \{(1,1,0,1),(1,1,3,-2),(-2,3,-1,-1),(-1,0,1,1)\}$$

e.– Obtener a partir de B_2^* una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$.

Solución.–

$$\left\{\Big(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},0\Big),\Big(\frac{1}{\sqrt{15}},\frac{1}{\sqrt{15}},\frac{-2}{\sqrt{15}},\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\Big),\Big(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{15}},\frac{-1}{\sqrt{15}},\frac{-1}{\sqrt{15}}\Big),\Big(0,\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}\Big)\right\}$$

f.– Hallar la mejor aproximación de $\overline{x}=(1,1,1,1)$ en S. Hacer lo mismo con los vectores $\overline{y}=(2,4,2,2)$ y $\overline{z}=(4,4,2,2)$. Calcular en ambos casos la norma del vector error.

Solución.–

$$\overline{x}'=\Big(\frac{6}{5},\frac{6}{5},\frac{3}{5},\frac{3}{5}\Big) \quad ; \quad \overline{y}'=\Big(\frac{16}{5},\frac{16}{5},\frac{8}{5},\frac{8}{5}\Big) \quad ; \quad \overline{z}'=\overline{z}$$

$$\|\overline{e}\|=\frac{\sqrt{10}}{5} \quad ; \quad \|\overline{e}\|=\frac{\sqrt{156}}{5}=\frac{2}{3}\sqrt{39} \quad ; \quad \|\overline{e}\|=0$$

g.– Utilizar el producto escalar:

$$\langle\,\overline{x},\overline{y}\,\rangle = x_1y_1+(x_1+x_2)(y_1+y_2)+x_3y_3+x_4y_4,$$

hallar la mejor aproximación de $\overline{x}=(1,1,1,1)$ en S. Hacer lo mismo con el vector $\overline{y}=(2,4,2,2$ y $\overline{z}=(4,4,2,2)$. Calcular en ambos casos la norma del vector error.

Solución.–

$$B_{OS}=\{(1,1,0,1),(1,1,6,-5)\}$$

$$\overline{x}'=\Big(\frac{12}{11},\frac{12}{11},\frac{6}{11},\frac{6}{11}\Big) \quad ; \quad \overline{y}'=\Big(\frac{32}{11},\frac{32}{11},\frac{16}{11},\frac{16}{11}\Big) \quad ; \quad \overline{z}'=\overline{z}$$

$$\|\overline{e}\|=\frac{\sqrt{55}}{11} \quad ; \quad \|\overline{e}\|=\frac{\sqrt{656}}{11}=\frac{4}{11}\sqrt{41} \quad ; \quad \|\overline{e}\|=0$$

<u>Ejercicio 6.16.</u>– Sea la matriz $AM=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&1\\1&-1&-1&0\\2&1&0&1\end{pmatrix}$, matriz ampliada asociada a un cierto sistema de ecuaciones lineales. Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

a.– Calcular $\det AM$ por el método de las operaciones elementales de fila..

Solución.–

$$\det AM = 1$$

b.– Escribe en forma vectorial el sistema de ecuaciones que representa AM.

Solución.–

$$x_1\cdot\overline{a}_1'+x_2\cdot\overline{a}_2'+x_3\cdot\overline{a}_3'=\overline{b}$$

$$\begin{array}{rcl}\overline{a}_1'=(1,1,1,2) & ; & \overline{a}_2'=(1,1,-1,1)\\ \overline{a}_3'=(1,0,-1,0) & ; & \overline{b}=(1,1,0,1)\end{array}$$

c.– Resuelve el sistema de ecuaciones asociado a la matriz AM en el sentido de mínimos cuadrados..

Solución.–

$$AM = \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\det AM \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{r}\,(AM) = 4 > \mathrm{r}\,A = 3 \quad \Longrightarrow \quad \text{S.I.}$$

3.– Hallamos la mejor aproximación w' de b' en $S = \mathcal{L}\left(\{\overline{a}_1', \overline{a}_2', \overline{a}_3'\}\right)$. Necesitamos dar los siguientes pasos:

3.1– Encontrar una base B de S: $B = \{\overline{a}_1', \overline{a}_2', \overline{a}_3'\}$

3.2– Aplicar el proceso de Gram–Schmidt a la base B para obtener una base ortogonal B_O de S:

- $\overline{v}_1 \ = \ \overline{a}_3' = (1, 0, -1, 0) = \overline{v}_1$

- $\overline{v}_2 \ = \ \overline{a}_1' - \dfrac{\langle \overline{a}_1', \overline{v}_1 \rangle}{\|\overline{v}_1\|^2} \cdot \overline{v}_1 = \cdots = \overline{a}_1' = (1, 1, 1, 2)$
  $\left\{ \begin{array}{l} \langle \overline{a}_1', \overline{v}_1 \rangle = \cdots = 0 \\ \|\overline{v}_1\|^2 = \cdots = 2 \end{array} \right.$

- $\overline{v}_3 \ = \ \overline{a}_2' - \dfrac{\langle \overline{a}_2', \overline{v}_1 \rangle}{\|\overline{v}_1\|^2} \cdot \overline{v}_1 - \dfrac{\langle \overline{a}_2', \overline{v}_2 \rangle}{\|\overline{v}_2\|^2} \cdot \overline{v}_1 = \cdots = \left(-\dfrac{3}{7}, \dfrac{4}{7}, -\dfrac{3}{7}, \dfrac{1}{7} \right) = \overline{v}_3$
  $\left\{ \begin{array}{l} \langle \overline{a}_2', \overline{v}_1 \rangle = \cdots = 2 \\ \|\overline{v}_1\|^2 = 2 \\ \langle \overline{a}_2', \overline{v}_2 \rangle = \cdots = 3 \\ \|\overline{v}_2\|^2 = \cdots = 7 \end{array} \right.$

$$B_O = \left\{ \overline{v}_1 = (1, 0, -1, 0), \overline{v}_2 = (1, 1, 1, 2), \overline{v}_3 = \left(-\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{1}{7} \right) \right\}$$

3.3.– Hallar la suma de las proyecciones ortogonales de $\overline{b}'$ sobre los vectores de la base ortogonal hallada en el apartado 3.2–.

$$\overline{w}' = \sum_{i=1}^{3} \frac{\langle \overline{b}', \overline{v}_i \rangle}{\|\overline{v}_i\|^2} \cdot \overline{v}_i = \frac{\langle \overline{b}', \overline{v}_1 \rangle}{\|\overline{v}_1\|^2} \cdot \overline{v}_1 + \frac{\langle \overline{b}', \overline{v}_2 \rangle}{\|\overline{v}_2\|^2} \cdot \overline{v}_2 + \frac{\langle \overline{b}', \overline{v}_3 \rangle}{\|\overline{v}_3\|^2} \cdot \overline{v}_3 = \cdots = \left(\frac{9}{10}, \frac{4}{5}, -\frac{1}{10}, \frac{6}{5} \right)$$

$$\begin{array}{lll} \langle \overline{b}', \overline{v}_1 \rangle = 1 & \langle \overline{b}', \overline{v}_2 \rangle = 4 & \langle \overline{b}', \overline{v}_3 \rangle = \frac{2}{7} \\ \|\overline{v}_1\|^2 = 2 & \|\overline{v}_2\|^2 = 7 & \|\overline{v}_2\|^2 = \frac{5}{7} \end{array}$$

4.– Resolver el sistema (que ha de ser compatible determinado):

$$x_1 \cdot \overline{a}_1' + x_2 \cdot \overline{a}_2' + x_3 \cdot \overline{a}_3' = \overline{w}'$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & \frac{9}{10} \\ x_1 + x_2 & = & \frac{4}{5} \\ x_1 - x_2 - 2x_3 & = & -\frac{1}{10} \\ 2x_1 + x_2 & = & \frac{6}{5} \end{array} \right.$$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & \frac{9}{10} \\ 1 & 1 & 0 & \frac{4}{5} \\ 1 & -1 & -1 & -\frac{1}{10} \\ 2 & 1 & 0 & \frac{6}{5} \end{array} \right) \overset{F_3+F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{9}{10} \\ 1 & 1 & 0 & \frac{4}{5} \\ 2 & 0 & 0 & \frac{8}{10} \\ 2 & 1 & 0 & \frac{6}{5} \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{2}{5} \\ x_2 & = & \frac{2}{5} \\ x_3 & = & \frac{1}{10} \end{array} \right.$$

5.– Norma del error cometido:

$$\left\| \left(\frac{9}{10}, \frac{4}{5}, -\frac{1}{10}, \frac{6}{5} \right) - (1,1,0,1) \right\| = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

6.3. Cuestiones verdadero/falso

Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. $\|\overline{x}\| = \|\overline{y}\| \quad \Longleftrightarrow \quad \langle \overline{x} + \overline{y}, \overline{x} - \overline{y} \rangle = 0$.
2. $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 \quad \forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^3$ es un producto escalar en $\mathbb{R}^3$.
3. En un espacio vectorial euclídeo, cualquier colección de vectores ortogonales es linealmente independiente.
4. La matriz de Gram en una base ortogonal es siempre una matriz diagonal.
5. Para calcular la mejor aproximación de un vector en un espacio vectorial euclídeo calculamos la suma de Fourier de este vector respecto de una base del espacio vectorial.

6.4. Cuestiones múltiple elección

En cada una de las preguntas del test, debe indicarse la o las respuestas correctas de las diferentes posibilidades existentes (puede haber una, más de una o ninguna). Los dos primeros fallos no se tendrán en cuenta, pero a partir del tercer fallo, por cada uno de ellos, se descontará la mitad de la puntuación de un acierto.

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.
   - ○ A es una matriz de Gram $\quad \Longleftrightarrow \quad A$ es regular.
   - ○ A es una matriz de Gram $\quad \Longleftrightarrow \quad a = 1$.
   - ○ A es una matriz de Gram $\quad \Longleftrightarrow \quad b > 0$.
   - ○ Si $b = 0$, A no es una matriz de Gram.
2. Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo real.
   - ○ $\|2 \cdot \overline{x}\| = 2 \cdot \|\overline{x}\| \quad \forall \overline{x} \in V$.
   - ○ $\|\overline{x} + \overline{y}\| = \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\| \quad \forall \overline{x}, \overline{y} \in V$.
   - ○ $\|\lambda \cdot \overline{x}\| = \lambda \cdot \|\overline{x}\| \quad \forall \overline{x} \in V\ ,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
   - ○ $\langle \overline{x}, \lambda \cdot \overline{y} \rangle = \lambda \cdot \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle \quad \forall \overline{x}, \overline{y} \in V\ ,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
3. Sea $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar: $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = x_1 y_1 + 2 x_2 y_2$.
   - ○ La matriz de Gram en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es la matriz I_2.
   - ○ La matriz de Gram en la base $B = \{(1,0), (1,-1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ es la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   - ○ $\|(1,0)\| = 1$.
   - ○ $\|(0,1)\| = 1$.
   - ○ $d\left((1,0), (0,1)\right) = \sqrt{2}$.

4. En un espacio vectorial euclídeo V de dimensión n:

   ◯ La matriz de Gram en una base ortonormal de V es la matriz unidad I_n.

   ◯ Si $B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ es base de V, entonces la matriz de Gram en la base B es invertible.

   ◯ La mejor aproximación de un vector $\overline{x} \in V$ en un subespacio vectorial S de V es la suma de las proyecciones ortogonales de $\overline{x}$ sobre una base cualquiera de S.

   ◯ $\|\overline{x} - \overline{y}\| \leq \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\| \quad \forall \overline{x}, \overline{y} \in V$.

5. Sea $G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ la matriz de Gram en la base $B_C = \left\{x^2, x, 1\right\}$ de un cierto producto escalar definido en el espacio vectorial $\mathcal{P}_2$:

   ◯ $p_1(x) = x^2$ y $p_2(x) = x$ son ortogonales.

   ◯ $\langle x^2 + x + 1, x\rangle = 2$.

   ◯ La mejor aproximación del polinomio $p_1(x) = x^2$ en el subespacio vectorial $S = \mathcal{P}_1$ es $q(x) = 2$.

   ◯ La mejor aproximación del polinomio $p_1(x) = x^2$ en el subespacio vectorial $S = \mathcal{P}_1$ es $q(x) = \frac{2}{3}$.

   ◯ B_C no es una base ortonormal es este espacio euclídeo.

7. Ejercicios unidad temática 7

7.1. Ejercicios a resolver en clase

Ejercicio 7.1.– Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Indicar cuáles de los siguientes vectores son vectores propios de A, hallando su valor propio asociado:

$$\overline{x} = (-1,1,0) \quad ; \quad \overline{y} = (1,1,1) \quad ; \quad \overline{z} = (-1,0,1) \quad ; \quad \overline{t} = (0,1,0) \quad ; \quad \overline{0} = (0,0,0)$$

Ejercicio 7.2.– Determinar el polinomio característico y calcular el determinante de una matriz $A \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$, sabiendo que:

$\sigma(A) = \{0,1,-1\}$
$\lambda = 0$ es un valor propio de A de orden o multiplicidad $k = 3$

Ejercicio 7.3.– Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a.– Hallar los valores propios y los subespacios propios de A.

b.– Diagonalizar la matriz A si es posible.

c.– Hallar, si es posible, una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A.

d.– Calcular $\det A$.

e.– Calcular A^{-1}, si es que existe.

f.– Calcular A^n en función de D y P

Ejercicio 7.4.– Hallar los valores propios y los subespacios propios de las siguientes matrices reales:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \; ; \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \; ; \; E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Indicar cuáles son diagonalizables y diagonalizar cuando sea posible.

Ejercicio 7.5.– Diagonalizar y diagonalizar ortogonalmente las siguientes matrices simétricas:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

7.2. Ejercicios propuestos (con solución)

Ejercicio 7.6.– Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a.– Diagonalizar A.

Solución.–

- $\begin{cases} \lambda_1 = -1 & ; & k_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0 & ; & k_2 = 1 \\ \lambda_3 = 2 & ; & k_3 = 1 \end{cases}$

- $V(-1) = \{(a, -a, a)/a \in \mathbb{R}\}$ $\quad B_1 = \{(1, -1, 1)\}$ $\quad d_1 = 1 = k_1$

- $V(0) = \{(a, 0, -a)/a \in \mathbb{R}\}$ $\quad B_2 = \{(1, 0, -1)\}$ $\quad d_2 = 1 = k_2$

- $V(2) = \{(a, 2a, a)/a \in \mathbb{R}\}$ $\quad B_3 = \{(1, 2, 1)\}$ $\quad d_3 = 1 = k_3$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP \quad , \text{ con } \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b.– Diagonalizar ortogonalmente A.

Solución.–

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{T}AP \quad , \text{ con } \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ ortogonal}$$

c.– ¿Es posible hallar una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A? En caso afirmativo, indicar una de esas bases, justificando la respuesta.

Solución.– $\quad B = \{(1, -1, 1), (1, 0, -1), (1, 2, 1)\}$

d.– ¿Es posible hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A? En caso afirmativo, indicar una de esas bases, justificando la respuesta.

Solución.– $\quad B_{ON} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\}$

Ejercicio 7.7.– Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a.– Hallar los valores propios y los subespacios propios de A.

Solución.–

- $\begin{cases} \lambda_1 = 0 & ; & k_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 & ; & k_2 = 1 \end{cases}$

- $V(0) = \{(0, a, b)/a, b \in \mathbb{R}\}$ $\quad B_1 = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ $\quad d_1 = 2 = k_1$

- $V(1) = \{(a, 0, a)/a \in \mathbb{R}\}$ $\quad B_2 = \{(1, 0, 1)\}$ $\quad d_2 = 1 = k_2$

b.– Diagonalizar A, si es posible.

Solución.–

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP \quad , \text{ con } \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c.– Hallar, si es posible, una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A.

Solución.– $\quad B_{\mathbb{R}^3} = \{(0,1,0),(0,0,1),(1,0,1)\}$

d.– ¿Es diagonalizable ortogonalmente la matriz A? Justificar la respuesta y en caso afirmativo diagonalizar ortogonalmente la matriz A.

Solución.– $A \neq A^T \quad \Longrightarrow \quad A$ no es diagonalizable ortogonalmente.

Ejercicio 7.8.– Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a.– Comprueba que $C = A - I_3$ es una matriz nilpotente de índice 3.

Solución.–

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad C^3 = (0)_{3\times 3}$$

b.– Calcula la única matriz $B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ que cumple $A \cdot B = B \cdot A = I_3$.

Solución.–

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c.– Calcular la matriz A^{-n} $\forall n \in \mathbb{N}$ y particulariza para $n = 33$.

Solución.–

- $A^{-1} = I + C_1 \quad$ con $C_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente de índice 3
- $A^{-n} = I + nC_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}C_1^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $A^{-33} = I + 33C_1 + 528C_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & -33 & 1122 \\ 0 & 1 & -66 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d.– ¿Cuál es la máxima dimensión que puede tener un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ para que se pueda construir una base del mismo formada exclusivamente por vectores propios de A? Justifica la respuesta y da un ejemplo de estos subespacios S, indicando una base de S formada por vectores propios de A.

Solución.–

- $\lambda_1 = 1 \quad ; \quad k_1 = 3$
- $V(1) = \{(a,0,0)/a \in \mathbb{R}\} \quad B_1 = \{(1,0,0)\} \quad d_1 = 1 \neq k_1 = 3$
- $S = \{(a,0,0)/a \in \mathbb{R}\} \qquad \dim S = 1$

Ejercicio 7.9.– Calcula, razonadamente, una matriz P regular tal que:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = P \cdot A \cdot P^{-1}$$

Calcular P^{-1} y A^5.

Solución.– Se trata de diagonalizar la matriz A, que como es diagonal es trivial:

- $\left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_1 = 1 & ; & k_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 & ; & k_2 = 1 \\ \lambda_3 = -1 & ; & k_3 = 1 \\ \lambda_4 = 4 & ; & k_4 = 1 \end{array} \right.$
- $V(1) = \{(a,0,0,0)/a \in \mathbb{R}\} \quad B_1 = \{(1,0,0,0)\} \quad d_1 = 1 = k_1$
- $V(3) = \{(0,a,0,0)/a \in \mathbb{R}\} \quad B_2 = \{(0,1,0,0)\} \quad d_2 = 1 = k_2$
- $V(-1) = \{(0,0,a,0)/a \in \mathbb{R}\} \quad B_3 = \{(0,0,1,0)\} \quad d_3 = 1 = k_3$
- $V(4) = \{(0,0,0,a)/a \in \mathbb{R}\} \quad B_4 = \{(0,0,0,1)\} \quad d_4 = 1 = k_4$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1}$$

Ejercicio 7.10.– Sea $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ una matriz triangular inferior tal que su polinomio característico es:

$$p(\lambda) = 2 - 5\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3$$

Se sabe además que los vectores $\overline{u} = (-1,0,1)$ y $\overline{v} = (1,1,0)$ son vectores propios de A.

a.– Hallar los valores propios de A, indicando su multiplicidad.

Solución.–

$$p(\lambda) = 2 - 5\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 = -(\lambda-1)^2(\lambda-2) \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} \lambda_1 = 1 & k_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 & k_2 = 1 \end{array} \right.$$

b.– Calcular los subespacios propios de A indicando una base de los mismos.

c.– Hallar la matriz A.

d.– ¿Es A diagonalizable? Justifica la respuesta y en caso afirmativo diagonalizar A.

e.– Calcular los valores propios de A^2, indicando su multiplicidad.

Solución.–

- $\left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_1 = 1 & ; & k_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 & ; & k_2 = 1 \end{array} \right.$

- $V(1) = \{(b-a, b, a)/a, b \in \mathbb{R}\}$ $\quad B_1 = \{(-1,0,1),(1,1,0)\}$ $\quad d_1 = 2 = k_1$

- $V(2) = \{(0,0,a)/a \in \mathbb{R}\}$ $\quad B_2 = \{(0,0,1)\}$ $\quad d_2 = 1 = k_2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP \quad , \text{ con } \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7.3. Cuestiones verdadero/falso

Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, entonces la matriz $A \cdot A^T$ es diagonalizable.
2. Todos los valores propios de una matriz regular son no nulos.
3. El polinomio característico de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es $p(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2$.
4. El hecho de que una matriz $n \times n$ tenga n valores propios distintos no garantiza que sea diagonalizable.
5. Las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ son semejantes.

7.4. Cuestiones múltiple elección

En cada una de las preguntas del test, debe indicarse la o las respuestas correctas de las diferentes posibilidades existentes (puede haber una, más de una o ninguna). Los dos primeros fallos no se tendrán en cuenta, pero a partir del tercer fallo, por cada uno de ellos, se descontará la mitad de la puntuación de un acierto.

1. Sea $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ tal que $A = A^T$ y su polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^3(\lambda+1)$.
   - ◯ No sabemos si A es diagonalizable hasta comprobar que $\dim V(0) = 3$.
   - ◯ A es diagonalizable.
   - ◯ A no es diagonalizable pues $\lambda = 0$ es un valor propio triple.
   - ◯ $\mathrm{r}\,(A) = 1$.
   - ◯ A no es regular.

2. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $\overline{x}$ un vector propio de A asociado a λ.
   - ◯ $-\overline{x}$ es vector propio de A asociado a λ.
   - ◯ $\overline{0}$ es vector propio de A asociado a λ pues $A \cdot \overline{0} = \lambda \cdot \overline{0}$.
   - ◯ $-\overline{x}$ es vector propio de A asociado a $-\lambda$.
   - ◯ $2\overline{x}$ es vector propio de A asociado a 2λ.
   - ◯ $2\overline{x}$ es vector propio de A asociado a λ.

3. Consideremos la matriz unidad de orden n, I_n.
   - ◯ I_n es diagonalizable.
   - ◯ I_n es diagonalizable ortogonalmente.
   - ◯ Todo vector no nulo de $\mathbb{R}^n$ es vector propio de I_n.
   - ◯ $\sigma(I_n) = \{1\}$.

4. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz diagonalizable.
   - ◯ $\mathrm{r}\,(A) = n$.
   - ◯ A es diagonalizable ortogonalmente.
   - ◯ A es una matriz regular.
   - ◯ A^T es diagonalizable.

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   - ◯ $\sigma(A) = \{0, 4\}$.
   - ◯ A es diagonalizable.
   - ◯ $\dim V(0) = 3$.
   - ◯ $\lambda = 4$ es un valor propio simple.