1. POTENCIAS DE MATRICES CUADRADAS

En este capítulo vamos a tratar de exponer distintas técnicas para hallar las potencias naturales de matrices cuadradas. Esta cuestión es de gran importancia y tiene muchas aplicaciones prácticas. Como vamos a poder observar el cálculo de potencias de matrices cuadradas lleva consigo un número muy elevado de operaciones. Es conveniente encontrar estrategias adecuadas que nos permitan calcular de modo eficiente las potencias naturales de matrices cuadradas. Empezamos con este primer ejemplo en el que utilizaremos el método de inducción.

1.1. El método de inducción

Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular $A^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Solución.–

En cualquier problema de este tipo es conveniente empezar calculando las sucesivas potencias de la matriz cuadrada A. En este caso vamos a observar que estas potencias parecen obedecer a un cierto patrón, lo que nos permite la posibilidad de lanzar una hipótesis sobre el valor de A^n que luego habrá que demostrar *por inducción.*

> *¿En que consiste el método de inducción?*
>
> *El método de demostración conocido como* inducción simple *(o método de inducción, sin más) se suele utilizar para demostrar que una cierta proposición $P(n)$, que se refiere a los números naturales n, es cierta para cada n. Este método procede así:*
>
> *1.– Demuestra que $P(1)$ es cierta.*
>
> *2.– Demuestra que si $P(h)$ es cierta, entonces $P(h+1)$ es cierta.*
>
> *Así queda claro que $P(n)$ es cierta para cualquier $n \in \mathbb{N}$.*
>
> *Se puede entender este proceso de demostración pensando en una fila de fichas de dominó puestas de pie de tal modo que si se cae una se cae la siguiente de la fila. Si te aseguras de este hecho y tiras la primera, está claro que se caerán todas.*
>
> *En este método de demostración la fase 2.– corresponde a asegurarse de que si se cae una ficha se cae la siguiente, y la fase 1.– corresponde a cerciorarse de que la primera ficha se cae.*

Como ya hemos mencionado, empezamos calculando las sucesivas potencias de la matriz cuadrada A:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\quad;\quad A^2=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}\quad;\quad A^3=\begin{pmatrix}4&0&4\\0&1&0\\4&0&4\end{pmatrix}\quad;\quad A^4=\begin{pmatrix}8&0&8\\0&1&0\\8&0&8\end{pmatrix}$$

Estas potencias de la matriz A las podemos escribir de otro modo:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\;;\;A^2=\begin{pmatrix}2^1&0&2^1\\0&1&0\\2^1&0&2^1\end{pmatrix}\;;\;A^3=\begin{pmatrix}2^2&0&2^2\\0&1&0\\2^2&0&2^2\end{pmatrix}\;;\;A^4=\begin{pmatrix}2^3&0&2^3\\0&1&0\\2^3&0&2^3\end{pmatrix}$$

Esto nos lleva a proponer como candidata la expresión:

$$A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&1&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}\qquad\forall\, n\in\mathbb{N}$$

Todavía no hemos demostrado nada. Tenemos que comprobar por el método de inducción que esta fórmula es cierta:

1. Comprobemos que es cierta para $n=2, n=3$, por ejemplo.

   Ésto es algo que ya lo hemos hecho previamente y no es necesario repetirlo.

2. Supongamos que la fórmula es cierta para un h y vamos a ver que también es cierta para $h+1$.

$$A^{h+1}\;=\;A\cdot A^h\;\overset{\substack{\text{por hipótesis de inducción}\\ \downarrow}}{=}\;\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2^{h-1}&0&2^{h-1}\\0&1&0\\2^{h-1}&0&2^{h-1}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2^h&0&2^h\\0&1&0\\2^h&0&2^h\end{pmatrix}=A^{h+1}\quad\text{c.q.d.}$$

De este modo ha quedado demostrado por inducción que:

$$A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&1&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}\qquad\forall\, n\in\mathbb{N}$$

1.2. Otro ejemplo con el método de inducción

Sea la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Calcular $A^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Solución.–

Procedemos del mismo modo que en el caso anterior, calculando las primeras potencias naturales de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot A \quad ; \quad A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot A^2$$

Este caso es un poco más complicado que el anterior pues las potencias de la matriz A siguen dos reglas diferentes dependiendo de que la potencia sea par o impar. Viendo las primeras potencias de A podemos suponer que:

$$\left.\begin{array}{l} A^{2n-1} = 2^{n-1} \cdot A \\[2ex] A^{2n} = 2^{n-1} \cdot A^2 \end{array}\right\} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Al igual que en el ejemplo anterior hay que demostrarlo por inducción.

1. Ya hemos visto que la fórmula es cierta para $n = 1, n = 2$.
2. Supongamos que la fórmula es cierta para un h y vamos a ver que también es cierta para $h + 1$.

$$\begin{aligned} A^{2(h+1)} &= A^{2h} \cdot A^2 \overset{\substack{\text{por hipótesis de inducción} \\ \downarrow}}{=} (2^{h-1} \cdot A^2) \cdot A^2 = \\ &= 2^{h-1} \cdot (A^2 \cdot A^2) = 2^{h-1} \cdot A^4 = 2^{h-1} \cdot (2 \cdot A^2) = 2^h \cdot A^2 \quad \text{c.q.d.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{2(h+1)-1} &= A^{2h-1} \cdot A^2 \overset{\substack{\text{por hipótesis de inducción} \\ \downarrow}}{=} (2^{h-1} \cdot A) \cdot A^2 = \\ &= 2^{h-1} \cdot (A \cdot A^2) = 2^{h-1} \cdot A^3 = 2^{h-1} \cdot (2 \cdot A) = 2^h \cdot A \quad \text{c.q.d.} \end{aligned}$$

Hemos demostrado por inducción:

$$\left.\begin{array}{l} A^{2n-1} = 2^{n-1} \cdot A \\[2ex] A^{2n} = 2^{n-1} \cdot A^2 \end{array}\right\} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

1.3. Matrices periódicas, idempotentes, nilpotentes e involutivas

Si una matriz cuadrada A es periódica, idempotente, nilpotente o involutiva resulta también muy sencillo calcular las potencias naturales de la matriz A.

Vamos a recordar las definiciones de matrices periódicas, idempotentes, nilpotentes e involutivas.

- *Una matriz cuadrada A es* periódica *si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $A^{p+1} = A$. Además si p es el menor número natural que cumple $A^{p+1} = A$ se dice que A* es periódica de período p.

  Es inmediato comprobar que si A es periódica de período p se cumple que:

  $$A \quad , \quad A^2 \quad , \quad A^3 \quad , \quad \cdots \quad , \quad A^p \quad , \quad A^{p+1} = A \quad , \quad A^{p+2} = A^2 \quad , \quad A^{p+3} = A^3 \quad , \quad \cdots$$

- *Una matriz cuadrada A es* idempotente *si*:

  $$A^2 = A$$

  Esto implica que: $A^n = A \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Vamos a comprobarlo también por el método de inducción.

  1. *Comprobemos que la fórmula es cierta para $n = 2$, $n = 3$*:

     $$\text{Por definición de matriz idempotente, tenemos que: } A^2 = A$$

     $$A^3 = A^2 \cdot A \overset{\overset{A^2 = A}{\downarrow}}{=} A \cdot A \overset{\overset{A^2 = A}{\downarrow}}{=} A$$

  2. *Vamos a demostrar que si la fórmula es cierta para una $h \in \mathbb{N}$, entonces también es cierta para $h + 1$.*

     $$A^{h+1} = A^h \cdot A \overset{\overset{\text{Por hipótesis de inducción: } A^h = A}{\downarrow}}{=} A \cdot A \overset{\overset{A^2 = A}{\downarrow}}{=} A \quad \text{c.q.d.}$$

- *Una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ se dice* nilpotente *si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $A^p = (0)_{n\times n}$. Al menor número natural p que cumple $A^p = (0)_{n\times n}$ se le llama* índice de nilpotencia *de la matriz A. Se cumple que*:

  $$A \text{ nilpotente de índice } p \quad \Longrightarrow \quad A^m = (0)_{n\times n} \quad \forall\, m \geq p$$

- *Una matriz cuadrada A de orden n se dice* involutiva *o* unipotente *si $A^2 = I_n$. Se tiene que*:

  $$A \text{ involutiva} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} A^{2m} & = & I_n \quad \forall\, m \in \mathbb{N} \\ A^{2m+1} & = & A \quad \forall\, m \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

Resulta por tanto inmediato calcular potencias naturales de matrices que sean o bien periódicas o nilpotentes o idempotentes o involutivas.

A continuación veremos cómo calcular de una manera sencilla potencias de matrices cuadradas A que pueden escribirse de la forma $A = k_1 \cdot I + k_2 B$ con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ y B una matriz periódica, idempotente, nilpotente o involutiva. Los casos más simples son con $k_1 = \pm 1$ y $k_2 = \pm 1$ y B nilpotente o idempotente.

1.4. Matrices relacionadas con matrices periódicas, idempotentes, nilpotentes o involutivas

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

a.– Comprobar que la matriz $B = A - I$ es idempotente.

Solución.–

Para demostrar que la matriz $B = A - I$ es idempotente, según la definición, tendremos que calcular B^2.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix} = B$$

Hemos comprobado que $B = A - I$ es idempotente como habíamos propuesto.

b.– Teniendo en cuenta que $A = B + I$, calcular $A^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Solución.–

Si una matriz cuadrada A se puede escribir como $I + B$, $I - B$, $B - I$ o una expresión parecida con B matriz nilpotente, idempotente o involutiva, suele resultar relativamente sencillo escribir la potencia n–ésima de A en función de la matriz B y de algunas de sus potencias naturales.

Observación.– *Vamos a recordar la expresión del desarrollo del binomio de Newton y la definición de números combinatorios y el factorial de un número natural:*

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \binom{n}{0}x^0y^n + \binom{n}{1}x^1y^{n-1} + \binom{n}{2}x^2y^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y + \binom{n}{n}x^ny^0 = \\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i \cdot y^{n-i}\end{aligned}$$

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad ; \qquad \binom{n}{i} = \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-i+1)}^{i \text{ factores}}}{i!}$$

$$0! = 1 \qquad ; \qquad i! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (i-1) \cdot i$$

Hay propiedades de los números combinatorios que pueden ser interesantes de conocer, aunque no es imprescindible para poder utilizar correctamente el desarrollo del binomio de Newton. Estas propiedades aparecen reflejadas claramente en la construcción del denominado triángulo de Tartaglia.

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i} \qquad ; \qquad \binom{n}{i} = \binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & & & \binom{1}{0}=1 \arrow[dr] & & \binom{1}{1}=1 \arrow[dl] & & & \\
 & & \binom{2}{0}=1 \arrow[dr] & & \binom{2}{1}=2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \binom{2}{2}=1 \arrow[dl] & & \\
 & \binom{3}{0}=1 \arrow[dr] & & \binom{3}{1}=3 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \binom{3}{2}=3 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \binom{3}{3}=1 \arrow[dl] & \\
\binom{4}{0}=1 & & \binom{4}{1}=4 & & \binom{4}{2}=6 & & \binom{4}{3}=4 & & \binom{4}{4}=1
\end{tikzcd}$$

Volviendo a nuestro ejercicio, tenemos que:

$$A^n = (B+I)^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Sabemos que el producto de matrices no es necesariamente conmutativo, de modo que, en general, no podemos aplicar el desarrollo del binomio de Newton para matrices, salvo que las matrices conmuten. En nuestro caso, como B e I conmutan, podremos aplicar el desarrollo del binomio de Newton.

$$\begin{aligned}
A^n &= (B+I)^n \overset{I\cdot B = B\cdot I}{\overset{\downarrow}{=}} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot B^i \cdot I^{n-i} = \\
&= \binom{n}{0} \cdot B^0 \cdot I^n + \binom{n}{1} \cdot B^1 \cdot I^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot B^2 \cdot I^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n} \cdot B^n \cdot I^0 \overset{B^n = B \quad \forall n \in \mathbb{N}}{\overset{\downarrow}{=}} \\
&= \binom{n}{0} \cdot I + \binom{n}{1} \cdot B + \binom{n}{2} \cdot B + \cdots + \binom{n}{n} \cdot B = \\
&= I + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}\right] \cdot B = \\
&= I + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} - \binom{n}{0}\right] \cdot B = \\
&= I + \left[(1+1)^n - \binom{n}{0}\right] \cdot B = I + [(1+1)^n - 1] \cdot B = \underline{I + (2^n - 1) \cdot B = A^n}
\end{aligned}$$

Si la matriz B hubiera sido nilpotente (como en uno de los ejercicios resueltos en el aula) utilizaríamos el hecho de que $B^n = (0) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ con $n \geq p$ siendo p el índice de nilpotencia de la matriz B. Si la matriz B hubiera sido involutiva $\left(B^2 = I\right)$ tendríamos que:

$$B^{2n} = I \quad ; \quad B^{2n-1} = B \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Las técnicas empleadas hasta ahora pueden resultar inadecuadas en muchas situaciones. En la unidad temática 7 (Valores y vectores propios. Diagonalización de matrices cuadradas) se explican nuevas ideas y conceptos que nos pueden ser muy útiles para calcular potencias naturales de matrices cuadradas y potencias enteras de matrices invertibles. La primera de estas técnicas consiste en utilizar el teorema de Cayley–Hamilton y la segunda se puede emplear si la matriz es diagonalizable.

1.5. El teorema de Cayley–Hamilton

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcular $A^n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Solución.–

Vamos a empezar calculando las sucesivas potencias de A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \; ; \; A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \; ; \; A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 12 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \; ; \; A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 16 & -32 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

A simple vista no parece sencillo encontrar un patrón para A^n. Además la matriz no es ni periódica, ni idempotente, ni nilpotente ni involutiva. Y parece poco probable que algún matriz sencilla relacionada con A (del tipo $I_3 \pm A$) sea periódica o idempotente o involutiva o nilpotente.

Hay que buscar otras alternativas que se van a proponer en la unidad temática 7. Comencemos con la primera que consiste en la utilización del teorema de Cayley–Hamilton.

> *El teorema de Cayley–Hamilton[1] dice que toda matriz cuadrada A satisface su ecuación característica $p(\lambda) = 0$, donde $p(\lambda)$ es el denominado polinomio característico de la matriz cuadrada A y se define del modo siguiente:*

$$p(\lambda) = \det\left(A - \lambda I_n\right)$$

[1]El teorema de Cayley–Hamilton lleva los nombres de los matemáticos Arthur Cayley y William Hamilton.
Arthur Cayley (1821–1895) Matemático británico. Es uno de los fundadores de la escuela británica moderna de matemáticas puras.
William Hamilton (1805–1865) Matemático, físico, y astrónomo irlandés. Hizo importantes contribuciones al desarrollo de la óptica, la dinámica, y el álgebra.

Vamos a calcular el polinomio característico de nuestra matriz A. *De acuerdo con la definición que acabamos de proporcionar*:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2 \cdot (1-\lambda)$$

Para estudiar si una matriz cuadrada A es diagonalizable[2] *o no es conveniente tener descompuesto en factores irreducibles en* $\mathbb{R}$ *su polinomio característico, que es como lo tenemos escrito. Para nuestro problema resulta más conveniente escribirlo de otra forma*:

$$p(\lambda) = (\lambda+2)^2 \cdot (1-\lambda) = -(\lambda-1)\cdot(\lambda+2)^2 = -\left(\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\right)$$

Luego según el teorema de Cayley–Hamilton, la matriz A verifica que:

$$A^3 + 3A^2 - 4I_3 = (0)_{3\times 3} \quad \Longrightarrow \quad A^3 = 4I_3 - 3A^2$$

Por lo tanto vamos a poder calcular potencias "pequeñas" de la matriz A partiendo de esa identidad[3] *del modo siguiente*:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^3 = 4I_3 - 3A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 12 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \left(4I_3 - 3A^2\right)\cdot A = 4A - 3A^3 \overset{\overset{A^3=4I_3-3A^2}{\downarrow}}{=} 9A^2 + 4A - 12I_3$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = \left(9A^2 + 4A - 12I_3\right)\cdot A = 9A^3 + 4A^2 - 12A \overset{\overset{A^3=4I_3-3A^2}{\downarrow}}{=} -23A^2 - 12A + 36I_3$$

....

Como vemos podemos escribir las potencias de A en función de la matriz unidad I_3*, de la propia matriz A y de* A^2*. Puede resultarnos cómodo para hallar potencias con exponente "pequeño".*

1.6. Matrices diagonalizables

Como hemos visto este método nos puede resultar cómodo solamente en ciertas ocasiones y fundamentalmente para calcular potencias de una matriz cuadrada A con exponente "pequeño". A continuación presentamos otro método que lo vamos a poder emplear para calcular potencias de matrices cuadradas diagonalizables. Para ello necesitamos conocer la definición de matriz diagonalizable así como alguna caracterización de matrices diagonalizables que nos resulte cómoda de manejar.

[2] Más adelante definimos y caracterizamos matrices diagonalizables.

[3] Observar que al tratarse A de una matriz regular, el teorema deCayley–Hamilton nos permite calcular de una manera muy simple la inversa de A:

$$A^3 + 3A^2 - 4I_3 = (0)_{3\times 3} \quad \Longrightarrow \quad 4I_3 = A^3 + 3A^2 \quad \Longrightarrow \quad I_3 = \frac{1}{4}\left(A^2 - A\right)\cdot A \quad \overset{\overset{A\ \text{regular}}{\downarrow}}{\Longrightarrow} \quad A^{-1} = \frac{1}{4}\left(A^2 - A\right)$$

- *Una matriz cuadrada A se dice* diagonalizable *si es semejante a una matriz diagonal D. Es decir, si existen matrices D diagonal y P regular tales que*

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Para dar una caracterización de matrices diagonalizable que nos resulte cómoda y eficiente de aplicar necesitamos nuevos conceptos:

- *Si A es una matriz cuadrada de orden n, se llama* valor propio λ *de A a cualquier escalar λ que cumple*:

$$\exists\, \overline{x} \neq \overline{0} \quad / \quad A \cdot \overline{x} = \lambda \cdot \overline{x}$$

Al vector $\overline{x} \neq \overline{0}$ se le llama vector propio de A asociado al valor propio λ.

La pregunta que nos surge de inmediato es: ¿cómo calculamos valores y vectores propios de una matriz cuadrada A? La clave está en la ecuación:

$$A \cdot \overline{x} = \lambda \cdot \overline{x} \quad \text{con} \;\; \overline{x} \neq \overline{0}$$

Esta ecuación podemos escribirla de la forma:

$$(A - \lambda I_n) \cdot \overline{x} = \overline{0} \quad \text{con} \;\; \overline{x} \neq \overline{0}$$

Esto significa que el sistema lineal homogéneo de n ecuaciones y n incógnitas cuya matriz de coeficientes es $(A - \lambda I_n)$ ha de ser compatible indeterminado, luego ha de cumplirse:

$$\det (A - \lambda I_n) = 0$$

A partir de este punto es sencillo comprender cómo calcular los valores propios y los vectores propios de una matriz cuadrada A:

- *Los valores propios de una matriz cuadrada A son las raíces de su polinomio característico*:

$$p(\lambda) = \det (A - \lambda I_n) = 0$$

- *Para calcular los* subespacios propios de A, *es decir, el conjunto de todos los vectores de $\mathbb{R}^n$ que cumplan*:

$$A \cdot \overline{x} = \lambda \cdot \overline{x}$$

donde λ es un valor propio de la matriz cuadrada A y que vamos a denotar por $V(\lambda)$, hemos de resolver el sistema homogéneo compatible indeterminado:

$$(A - \lambda I_n) \cdot \overline{x} = \overline{0}$$

Es decir, si λ es un valor propio de A, entonces:

$$V(\lambda) = \{\overline{x} \in \mathbb{R} / A \cdot \overline{x} = \lambda \cdot \overline{x}\} = \left\{\overline{x} \in \mathbb{R} / \, (A - \lambda I_n) \cdot \overline{x} = \overline{0} \;\; \text{(S.H.C.I.)}\right\}$$

Partiendo de estas caracterizaciones estamos en condiciones de dar un método muy sencillo para decidir si una matriz cuadrada es diagonalizable, que además nos permite calcular, en el caso de que la matriz cuadrada A sea diagonalizable, la matriz D diagonal semejante a A y la matriz de paso P.

Una matriz cuadrada A es diagonalizable si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$
- $d_i = k_i \quad i = 1, 2, \ldots, r$

Donde k_i es la multiplicidad del valor propio λ_i como raíz del polinomio característico y d_i es la dimensión del subespacio propio asociado a λ_i, es decir: $d_i = \dim V(\lambda_i)$.

Pasamos a proponer otro ejercicio en el que nos será útil emplear que la matriz es diagonalizable para calcular sus potencias n–ésimas.

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular $A^n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Solución.–

Vamos a descartar los métodos explicados anteriormente y vamos a centrarnos en el hecho que la matriz cuadrada A es diagonalizable. No nos vamos a detener en justificar cuáles son los valores propios y los subespacios propios de A pues lo haremos en un capítulo posterior. Realizando las cuentas necesarios llegamos a:

$$\begin{array}{lllll} \lambda_1 = 1 & ; & k_1 = 1 & ; & B_1 = \{\overline{u}_1 = (1,1,1)\} \\ \lambda_2 = 2 & ; & k_2 = 2 & ; & B_2 = \{\overline{u}_2 = (-1,0,3), \overline{u}_3 = (1,1,0)\} \end{array}$$

donde B_i es una base del subespacio propio λ_i.

Hemos comprobado que la matriz A es diagonalizable y además se puede escribir[4]:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot A \cdot P \quad \text{con} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

[4] Observar que los elementos de la diagonal principal de la matriz diagonal D son los valores propios de A. Si alguno de estos valores propios no es simple hay que escribirlo tantas veces como su multiplicidad como raíz del polinomio característico de A.

La columna j–ésima de P se corresponde con uno de los vectores de la base del subespacio propio $V(\lambda)$ que hemos hallado previamente. De modo que el vector de la columna j–ésima de P es un vector propio asociado al valor propio que está en la posición d_{jj} de la matriz D.

Como vemos las columnas de P son todos los vectores de las dos bases B_1 y B_2 de los subespacios propios $V(\lambda_1)$ y $V(\lambda_2)$ que hemos hallado previamente.

Partiendo de la igualdad $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ es muy sencillo calcular las potencias n–ésimas de la matriz A, razonando del modo siguiente:

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P \implies A = P \cdot D \cdot P^{-1} \implies A^n = \underbrace{\left(P \cdot D \cdot P^{-1}\right) \cdot \left(P \cdot D \cdot P^{-1}\right) \cdot \cdots \cdot \left(P \cdot D \cdot P^{-1}\right)}_{n \quad \text{factores}}$$

Utilizando la propiedad asociativa del producto de matrices, se tiene que:

$$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$$

Teniendo en cuenta que las potencias n–ésimas de una matriz diagonal D son triviales de calcular, pues:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{mm} \end{pmatrix} \implies D^n = \begin{pmatrix} d_{11}^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22}^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{mm}^n \end{pmatrix}$$

sólo nos queda calcular la inversa de la matriz P para poder calcular A^n sin necesidad de mucho esfuerzo.

Aunque se explicará en el capítulo siguiente con más detalle cómo calcular inversas de matrices regulares, procedemos a hallar la inversa de la matriz regular P realizando operaciones elementales de fila. A continuación se explica brevemente en qué consiste este método.

Vamos a calcular la inversa de nuestra matriz P utilizando operaciones elementales de fila. Para ello construimos una matriz 3×6 de modo que las tres primeras columnas correspondan a la matriz P y las tres últimas columnas a la matriz unidad de orden 3 y separaremos las dos "matrices" con una línea vertical. Se trata de ir realizando operaciones elementales de fila de modo que las tres primeras columnas se transformen en la matriz unidad; entonces las tres últimas columnas corresponden a la matriz inversa de P.

En general, a la hora de seguir este procedimiento es conveniente seguir un cierto orden. Este orden se basa en observar las tres primeras columnas exclusivamente para ir realizando las operaciones elementales de fila adecuadas de modo que:

1. *Conseguir ceros debajo de la diagonal principal.*
2. *Transformar la diagonal principal en unos.*
3. *Hacer ceros encima de la diagonal principal sin deshacer lo conseguido.*

Veamos como procedemos con la matriz P:

$$(P|\, I_3) \;=\; \left(\begin{array}{rrr|rrr} \boxed{1} & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{F_2-F_1\\F_3-F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3-4F_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right) \overset{-F_3}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -3 & 4 & -1 \end{array}\right) \overset{F_1-F_3}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \end{array}\right) \overset{F_1+F_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \end{array}\right) = (I_3|\, P^{-1})$$

Para nuestra matriz A se tiene entonces que:

$$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Podemos dejar el resultado de esta forma o bien podemos realizar este producto y obtendremos una expresión explícita de las potencias n–ésimas de A:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -2^n & 2^n \\ 1 & 0 & 2^n \\ 1 & 3\cdot 2^n & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2^{n+1} & -3-2^n+2^{n+2} & 1-2^n \\ 3-3\cdot 2^n & -3+2^{n+2} & 1-2^n \\ 3-3\cdot 2^n & -3+3\cdot 2^n & 1 \end{pmatrix} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

1.7. Potencias de matrices cuadradas con *Mathematica*

A continuación explicamos cómo podemos utilizar *Mathematica* para calcular potencias de matrices cuadradas.

Una matriz en *Mathematica* se carga como una lista de listas, donde cada una de las listas son las distintas filas de la matriz A.

La función que nos permite calcular potencias n–ésimas de matrices cuadradas es la función `MatrixPower`.

```
a1 = {{1, 0, 1}, {0, 1, 0}, {1, 0, 1}};
MatrixPower[a1, n]
```

$$\left\{\left\{\frac{0^n}{2}+2^{-1+n},\ 0^{1+n},\ -\frac{0^n}{2}+2^{-1+n}\right\},\ \left\{-\frac{0^{1+n}}{2},\ 1+0^{2+n},\ \frac{0^{1+n}}{2}\right\},\ \left\{-\frac{0^n}{2}+2^{-1+n},\ 0^{1+n},\ \frac{0^n}{2}+2^{-1+n}\right\}\right\}$$

Si queremos calcular por ejemplo A^{10} utilizamos el operador de sustitución (`/.`).

```
MatrixPower[a1, n] /. {n → 10}

{{512, 0, 512}, {0, 1, 0}, {512, 0, 512}}
```

Probemos con otro ejemplo:

```
a2 = {{1, 0, 0}, {1, -2, 1}, {0, 0, -2}};
MatrixPower[a2, n]
```

$$\left\{\{1, 0, 0\}, \left\{\frac{1}{3}(1-(-2)^n), (-2)^n, -(-1)^n 2^{-1+n} n\right\}, \{0, 0, (-2)^n\}\right\}$$

1.8. Ejercicios propuestos

1. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Calcular A^n y B^n $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. Comprueba que la matriz A es diagonalizable y calcula A^n $\forall n \in \mathbb{N}$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Calcular las potencias n–ésimas de la matriz cuadrada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Sugerencia.– Comprobar que la matriz $A - I_3$ es nilpotente de índice 3.

4. Sea A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Diagonalizar A y calcular A^n $\forall n \in \mathbb{N}$.

5. Sea:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a.– Comprobar que para la matriz $B = A + I_3$ se cumple $B^3 = (0)_{3\times 3}$.

b.– Calcular $A^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

6. Sea A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $B = A + I_3$, calcular B^n y $A^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.