1. INVERSA DE UNA MATRIZ REGULAR

Calcular la inversa de una matriz regular es un trabajo bastante tedioso. A través de ejemplos se expondrán diferentes técnicas para calcular la matriz inversa de una matriz regular que pueden facilitarnos este molesto trabajo. En principio, la técnica más aconsejable es utilizar operaciones elementales de fila, pero a veces se puede emplear otros métodos que pueden ser muy útiles en ciertas ocasiones.

1.1. Operaciones elementales de fila

El método mas universal y eficiente para calcular la inversa de una matriz regular es realizar operaciones elementales de fila. Recordamos a continuación lo que se entiende por operaciones elementales de fila sobre una matriz A.

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$*. Se llaman* operaciones elementales de filas sobre A *a cualquiera de las siguientes operaciones:*

1. (Intercambio) *Intercambiar dos filas de A:*

$$F_i \leftrightarrow F_j$$

2. (Escalonamiento) *Multiplicar todo los elementos de una fila de A por un número no nulo:*

$$\lambda \cdot F_i$$

3. (Reemplazo) *Sumar a una fila i otra fila j multiplicada por un número:*

$$F_i + \lambda \cdot F_j$$

Las operaciones de fila se pueden aplicar a acualquier matriz. Decimos que dos matrices A y B del mismo orden $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *son* equivalentes por filas *y se escribe:*

$$A \sim B$$

cuando la matriz B se obtiene a partir de A mediante un número finito de operaciones elementales de filas, es decir, existe una sucesión de operaciones elementales de fila que transforme una matriz en otra.

El algoritmo que proponemos para calcular la inversa de una matriz regular A mediante operaciones elementales de fila, se puede resumir diciendo que básicamente hay que realizar operaciones elementales de fila sobre una matriz regular A hasta llegar a la matriz unidad. Si realizamos estas mismas operaciones de fila (en el mismo orden) sobre la matriz unidad I llegaremos a la invera de A: A^{-1}.

Podemos recordar de forma esquemática esta técnica escribiendo:

$$(A|\, I) \overset{\overset{O_1}{\downarrow}}{\sim} (A_1|\, B_1) \overset{\overset{O_2}{\downarrow}}{\sim} (A_2|\, B_2) \overset{\overset{O_3}{\downarrow}}{\sim} \cdots \overset{\overset{O_n}{\downarrow}}{\sim} (I|\, A^{-1})$$

donde O_i significa operaciones elementales de fila.

¿Cómo llegamos a la matriz unidad I partiendo de una matriz regular A y realizando operaciones elementales de fila?

Es aconsejable seguir el siguiente procedimiento:

1. *Conseguimos ceros debajo de la diagonal principal ("bajamos la escalera").*
2. *Conseguimos unos en la diagonal principal.*
3. **Sin deshacer lo conseguido:** *conseguimos ceros encima de la diagonal principal ("subimos la escalera").*

Este método que aquí se sugiere se puede describir de una manera más correcta utilizando el concepto de forma escalonada reducida de una matriz*, que pasamos a exponer a continuación.*

> *Si denominamos* entrada principal *de una fila a la entrada diferente de cero que está más a la izquierda en una fila no nula, diremos que una matriz está en* forma escalonada *si tiene las siguientes tres propiedades:*
>
> 1. *Todas las filas diferentes de cero están arriba de cualquier fila nula.*
> 2. *Cada entrada principal de una fila está en una columna a la derecha de la entrada principal de una fila superior.*
> 3. *Todas las entradas de una columna que están debajo de una entrada principal son cero.*
>
> *Si una matriz en forma escalonada satisface las condiciones adicionales siguientes, entonces decimos que está en* forma escalonada reducida.
>
> 4. *La entrada principal de cada fila no nula es 1.*
> 5. *Cada 1 principal es la única entrada principal no nula en su columna.*

El algoritmo que hemos propuesto para calcular A^{-1} lo podemos explicar ahora diciendo que se trata de obtener la forma escalonada reducida de la matriz ampliada $(A|\, I)$. De modo que llegamos a:

$$(A|\, I) \sim \cdots \sim (I|\, A^{-1})$$

Explicamos con más detalle en el siguiente ejemplo cómo obtener la forma escalonada reducida de una matriz cualquiera.

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobar que A es una matriz regular y hallar su inversa.

Solución.–

Calculamos en primer lugar el determinante de la matriz A.

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{F_3-2F_2}{\underset{\downarrow}{=}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{desarrollo } C_2}{\underset{\downarrow}{=}} -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \implies A \text{ regular}$$

Para calcular la inversa de la matriz A, que ya sabemos existe, vamos a utilizar la técnica que hemos explicado brevemente y que explicamos aquí con mayor detalle.

PASO 1.– *Escribimos la matriz ampliada $(A|\,I)$.*

$$(A|\,I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

PASO 2.– *Escogemos como columna pivote la columna no nula situada más a la izquierda.*

$$(A|\,I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\uparrow$ columna pivote

PASO 3.– *Seleccionamos como pivote una entrada no nula en la columna pivote. Si es necesario intercambiamos filas para mover esa entrada a la posición pivote.*

$$(A|\,I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_2\leftrightarrow F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \overset{\text{pivote}}{\overset{\downarrow}{\boxed{1}}} & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

PASO 4.– *Utilizamos operaciones elementales de fila de tipo reemplazo para conseguir ceros debajo del pivote.*

$$(A|\,I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_2\leftrightarrow F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3-2F_1}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

PASO 5.– *Ignoramos la fila que contiene el pivote y todas las filas, si las hubiere, por encima de ella ("bajamos la escalera"). Repetimos los pasos 2–4 a la submatriz que queda.*

Aplicamos este proceso hasta llegar a la última fila.

$$(A|\,I) \;=\; \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_2 \leftrightarrow F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3 - 2F_1}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3 + F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

PASO 6.– *Transformamos los elementos de la diagonal principal en* 1 *utilizando la operación elemental de fila de escalonamiento.*

$$(A|\,I) \;=\; \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_2 \leftrightarrow F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3 - 2F_1}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3 + F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{1/4F_3}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{array}\right)$$

PASO 7.– *Comenzando con el pivote más a la derecha y trabajando hacia arriba y hacia la izquierda ("subiendo la escalera"), hacemos ceros por encima de cada pivote mediante operaciones de fila de tipo reemplazo. Si trabajamos hacia arriba y hacia la izquierda no perdemos los ceros conseguidos anteriormente.*

$$(A|\,I) \;=\; \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_2 \leftrightarrow F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3 - 2F_1}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3 + F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{1/4F_3}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{array}\right) \overset{\substack{F_1 + F_3 \\ F_2 - 2F_3}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{array}\right) \overset{F_1 - F_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & -1/2 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{array}\right)$$

Por lo tanto:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/2 & 3/4 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Si nos parece oportuno podemos comprobar el resultado, demostrando por ejemplo que:

$$A \cdot A^{-1} = I_3$$

En general, es recomendable seguir los pasos aquí indicados, pero hay ocasiones en las que puede resultarnos más cómodo no seguir estos pasos y utilizar algún "atajo".

Proponemos a continuación otro ejemplo que ilustra esta situación.

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Hallar su inversa.

Solución.–

Se recomienda al alumno que siga los 7 pasos antes indicados y que compare con el método aquí utilizado.

$$\begin{aligned}
(A|\, I) \quad &= \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_i - F_{i-1}} \; i=2,3,4 \\
&\sim \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_i - F_{i+1}} \; i=1,2,3 \\
&\sim \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) = \left(I \,\middle|\, A^{-1}\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2. Resolución de un sistema de ecuaciones

Este método es también conocido como método de eliminación gaussiana y es básicamente lo mismo que el método anterior. Podemos explicarlo de forma esquemática del modo siguiente:

Sea A una matriz regular. Planteamos el sistema:

$$A \cdot X = Y$$

se trata de escribir las incógnitas X es función de los términos independientes Y. Una vez resuelto el sistema, escribimos la solución en forma matricial y tendremos:

$$X = A^{-1} \cdot Y$$

Resumiendo:

$$A \cdot X = Y \qquad \overset{A \ \text{regular}}{\overset{\downarrow}{\Longrightarrow}} \qquad X = A^{-1} \cdot Y$$

Vamos a aplicar este método al siguiente ejemplo.

Calcular la inversa de la matriz regular

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución.–

Planteamos el sistema de ecuaciones lineales en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Escribimos el sistema en la forma usual y lo resolvemos (utilizando el método de Gauss, por ejemplo):

$$\left.\begin{array}{rrcl} E_1: & x_1 - x_3 & = & y_1 \\ E_2: & 2x_2 & = & y_2 \\ E_3: & x_1 + x_3 & = & y_3 \end{array}\right\}$$

Podemos utilizar el método de Gauss o método de eliminación gaussiana para resolver este sistema o bien podemos resolverlo por otros métodos.

$$\left.\begin{array}{rrcl} E_1: & x_1 - x_3 & = & y_1 \\ E_2: & 2x_2 & = & y_2 \\ E_3 - E_1: & 2x_3 & = & y_3 - y_1 \end{array}\right\}$$

Hemos obtenido un sistema de resolución inmediata pues se trata de un sistema triangular.

$$\left.\begin{array}{rrcl} E_1: & x_1 - x_3 & = & y_1 \\ E_2: & 2x_2 & = & y_2 \\ E_3 - E_1: & 2x_3 & = & y_3 - y_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_2 & = & \frac{1}{2}y_2 \\ x_3 & = & -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_3 \end{array}\right.$$

Escribiendo la solución en forma matricial[1] es trivial identificar la inversa de A:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Como podemos observar este método aunque es básicamente el mismo que el expuesto anteriormente, es muy útil cuando el sistema que tenemos que resolver es sencillo. Por lo tanto, siempre que tengamos que calcular la inversa de una matriz triangular regular podemos emplear esta técnica, pues los sistemas triangulares compatibles son de resolución inmediata.

1.3. Teorema de Cayley–Hamilton y ecuaciones matriciales

Ya hemos mencionado en el capítulo anterior que podemos calcular la inversa de una matriz regular utilizando el teorema de Cayley–Hamilton de una forma muy sencilla. En general, si A una matriz cuadrada regular que satisface una ecuación matricial del tipo:

$$\alpha_m \cdot A^m + \alpha_{m-1} \cdot A^{m-1} + \cdots + \alpha_1 \cdot A + \alpha_0 \cdot I = (0) \qquad \textit{con } \alpha_0 \neq 0$$

se puede calcular fácilmente su inversa del modo que se explica a continuación.

Teniendo en cuenta que la inversa de una matriz regular A es la única matriz que satisface la ecuación:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

podemos escribir:

$$\alpha_0 \cdot I = -\left(\alpha_m \cdot A^m + \alpha_{m-1} \cdot A^{m-1} + \cdots + \alpha_1 \cdot A\right)$$

como $\alpha_0 \neq 0$*, tenemos que:*

$$I = -\left(\frac{\alpha_m}{\alpha_0} \cdot A^m + \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_0} \cdot A^{m-1} + \cdots + \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \cdot A\right)$$

Utilizando la propiedad distributiva del producto respecto de la suma:

$$I = A \cdot \left(-\frac{\alpha_m}{\alpha_0} \cdot A^{m-1} - \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_0} \cdot A^{m-2} - \cdots - \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \cdot I\right)$$

y por lo tanto:

$$A^{-1} = -\frac{\alpha_m}{\alpha_0} \cdot A^{m-1} - \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_0} \cdot A^{m-2} - \cdots - \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \cdot I$$

[1] Es importante que cuando escribamos la solución lo hagamos de forma "ordenada", lo que nos permitirá escribir la solución en forma matricial de forma inmediata.

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular el polinomio característico de A, comprobar que A es regular y hallar su inversa.

Solución.–

Recordemos que el polinomio característico de una matriz cuadrada A *se define como*:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Vamos a calcular el polinomio característico de la matriz A:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{F_1+F_2+F_3+F_4}{\overset{\downarrow}{=}} \\ &= \begin{vmatrix} 6-\lambda & 6-\lambda & 6-\lambda & 6-\lambda \\ 1 & 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_i-C_1 \quad i=2,3,4}{\overset{\downarrow}{=}} \\ &= \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 \cdot (6-\lambda) = p(\lambda) \end{aligned}$$

Utilizando el propio polinomio característico podemos obtener el valor de $\det A$ *al evaluar el polinomio característico en 0:*

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) \quad \Longrightarrow \quad p(0) = \det A$$

Teniendo en cuenta que el polinomio característico de A es:

$$p(\lambda) = (2-\lambda)^3 \cdot (6-\lambda)$$

se tiene que:

$$p(0) = 2^3 \cdot 6 = 48 = \det A \quad \Longrightarrow \quad A \text{ regular}$$

Vamos a calcular la inversa de A*, que sabemos existe, utilizando el teorema de Cayley–Hamilton, que recordemos dice que toda matriz cuadrada* A *satisface su ecuación característica, que es* $p(\lambda) = 0$.

Utilizando el teorema de Cayley–Hamilton en nuestro ejercicio, se tiene que:

$$p(A) = (2I - A)^3 \cdot (6I - A) = A^4 - 12A^3 + 48A^2 - 80A + 48I = (0)_{4\times 4}$$

De aquí obtenemos:

$$\begin{aligned} 48I &= -A^4 + 12A^3 - 48A^2 + 80A \\ I &= \frac{1}{48}\left(-A^3 + 12A^2 - 48A + 80I\right) \cdot A \end{aligned}$$

Con lo que:

$$A^{-1} = \frac{1}{48}\left(-A^3 + 12A^2 - 48A + 80I\right) = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

1.4. Inversas de matrices regulares con *Mathematica*

Para calcular la inversa de una matriz regular con *Mathematica* utilzamos la función `Inverse`.

```
a = {{1, 2, -1}, {1, 0, -1}, {1, 1, 1}}; Inverse[a]
```

$$\left\{\left\{-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right\}, \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right\}, \left\{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\}\right\}$$

Si la matriz no es regular, al utilizar la función `Inverse`, *Mathematica* nos devolverá un mensaje de error. Podemos calcular el determinante de una matriz cuadrada mediante la función `Det`.

```
b = {{1, 1, -1, 1}, {1, 0, -1, 2}, {1, 1, 1, 0}, {2, 4, 0, -1}};
Inverse[b]

Inverse::sing : Matrix
   {{1, 1, -1, 1}, {1, 0, -1, 2}, {1, 1, 1, 0}, {2, 4, 0, -1}} is singular. More…

Inverse[{{1, 1, -1, 1}, {1, 0, -1, 2}, {1, 1, 1, 0}, {2, 4, 0, -1}}]
```

```
Det[b]

0
```

1.5. Ejercicios propuestos

1. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Calcular el determinante de A y hallar su inversa en caso de que A sea regular.

2. Calcular la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Comprobar que $A^2 = 4I$. Calcular la inversa de A.

4. Calcular la inversa de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Hallar la inversa de la matriz triangular:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Comprobar que la matriz A es regular y hallar su inversa, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$