1. ESPACIOS VECTORIALES

Consideremos el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^4$:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 - x_4 = 0 \wedge x_2 - x_4 = x_3\}$$

a.– Comprobar que S es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

Solución.–

Para demostrar que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ encontraremos un sistema generador G de S ($S = \mathcal{L}(G)$).

¿Cómo?: Resolviendo el sistema lineal homógeneo que satisfacen las componentes de cualquier vector de S.

$$\begin{aligned} S &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 - x_4 = 0 \wedge x_2 - x_4 = x_3\} = \\ &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 - x_4 = 0 \wedge x_2 - x_3 - x_4 = 0\} \overset{*}{=} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{x_4 = x_1} \\ \underline{x_3 = x_2 - x_1} \end{array} \right.$$

Llamando $x_1 = a$, $x_2 = b$ tenemos :

$$x_4 = a \quad ; \quad x_3 = b - a$$

$$\overset{*}{=} \{(a, b, b - a, a)/a, b \in \mathbb{R}\} \overset{**}{=}$$

*Cuando conseguimos escribir los vectores de S de esta forma,
ya resulta inmediato encontrar un sistema generador de S.*

$$\overset{**}{=} \{a \cdot (1, 0, -1, 1) + b \cdot (0, 1, 1, 0)/a, b \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1 = (1, 0, -1, 1), \overline{u}_2 = (0, 1, 1, 0)\}\right)$$

$$S = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1, \overline{u}_2\}\right) \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \ \ \underline{S \text{ es subespacio vectorial de } \mathbb{R}} \\ \bullet \ \ B = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2\} \text{ es sistema generador de } S \end{array} \right.$$

b.– Obtener dos bases distintas B_1 y B_2 de S y hallar la dimensión de S.

Solución.–

En el apartado anterior hemos encontrado un sistema generador de S, ahora debemos comprobar si se trata de un sistema libre o no. Si se trata de un sistema libre tenemos ya una base de S y por tanto conocemos su dimensión, lo cual nos será de gran utilidad de cara a encontrar nuevas bases del subespacio S.

Para comprobar si B es un sistema libre, como solamente consta de dos vectores, podemos utilizar un resultado que resulta muy cómodo:[1]

[1] Este resultado solamente se puede utilizar para comprobar si una familia de dos vectores es un sistema ligado. Si tenemos un conjunto formado por más de dos vectores y queremos estudiar su dependencia o independencia lineal tendremos que recurrir a la definición o al teorema del rango.

Una familia formada por dos vectores no nulos $\overline{u}$ y $\overline{v}$ es un sistema ligado si y sólo si

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R} \,/\, \overline{u} = \alpha \cdot \overline{v}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \ B_1 = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2\} \ \text{ es sistema generador de } S \\ \bullet\ \ \overline{u}_1 \neq \alpha \cdot \overline{u}_2 \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad B_1 \ \text{ es sistema libre} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{B_1 = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2\} \ \text{ es base de } S} \quad ; \quad \underline{\dim S = 2}$$

Para hallar una segunda base B_2 de S, en primer lugar construiremos un sistema de dos vectores de S que habremos de comprobar son linealmente independientes, por ejemplo:

$$B_2 = \{\overline{v}_1 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 = (1,1,0,1), \overline{v}_2 = \overline{u}_1 - \overline{u}_2 = (1,-1,-2,1)\} \subset S$$

$$\overline{v}_1 \neq \alpha \cdot \overline{v}_2 \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad B_2 \ \text{ es sistema libre}$$

Solamente hemos comprobado que B_2 es un sistema libre. No podemos asegurar, todavía, que se trate de una base de S. No será necesario comprobar que se trata de un sistema generador de S, pues al conocer $\dim S$ podemos utilizar un "atajo" [2]*:*

$$\left.\begin{array}{r} B_2 \subset S \ \text{ es sistema libre} \\ \dim S = 2 = \operatorname{card} B_2 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \underline{B_2 \ \text{ es base de } S}$$

c.– Hallar un sistema generador G de S que no sea base de S.

c$'$.– Hallar un sistema generador G de S que no sea linealmente independiente.

Solución.–

Vamos a responder a las dos preguntas al mismo tiempo. Elegimos un conjunto G formado por los vectores de una base de S y añadimos una combinación lineal de los mismos. Por ejemplo:

$$G = \{\overline{u}_1 = (1,0,-1,1), \overline{u}_2 = (0,1,1,0), \overline{u}_3 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 = (1,1,0,1)\}$$

Para demostrar que este conjunto G cumple las condiciones pedidas en el enunciado podemos proceder de varias maneras:

- G es sistema generador de S, pues:

$$\underbrace{B_1}_{B_1 \text{ base de } S \ \Longrightarrow\ B_1 \text{ s.g. de } S} \subset G \quad \Longrightarrow \quad \underline{G \text{ s.g. de } S}$$

o bien:

$$S = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1, \overline{u}_2\}\right) \overset{\overline{u}_3 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2}{\overset{\downarrow}{=}} \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{G \text{ s.g. de } S}$$

[2] El cardinal de un conjunto (card) es el número de elementos que pertenecen al conjunto.

- G no es base de S (no es sistema libre), pues:

$$\dim S = 2 < 3 = \operatorname{card} G \quad \Longrightarrow \quad \underline{G \text{ no es base de } S} \ \left(\underline{G \text{ no es s.libre}}\right)$$

o bien:

$$\overline{u}_3 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 \quad \Longrightarrow \quad \underline{G \text{ no es s.libre}} \quad \Longrightarrow \quad \underline{G \text{ no es base de } S}$$

d.– Hallar un sistema libre F de S que no sea base de S.

d′.– Hallar un sistema libre F de S que no sea sistema generador de S.

Solución.–

Elegimos un conjunto F obtenido eliminando, al menos, un vector de una base de S Por ejemplo:

$$F = \{\overline{u}_1 = (1, 0, -1, 1)\}$$

Para demostrar que este conjunto F cumple las condiciones pedidas en el enunciado podemos proceder de varias maneras:

- F es un sistema libre de S, pues:

$$F \subset \underbrace{B_1}_{B_1 \text{ base de } S \ \Longrightarrow \ B_1 \text{ s.libre}} \quad \Longrightarrow \quad \underline{F \text{ s.libre}}$$

o bien:

$$\overline{u}_1 \neq \overline{0} \quad \overset{\substack{\text{una familia formada por un único vector es libre si y sólo si este vector es no nulo} \\ \downarrow}}{\Longrightarrow} \quad \underline{F \text{ s.libre}}$$

- F no es base de S (no es sistema generador de S), pues:

$$\dim S = 2 > 1 = \operatorname{card} F \quad \Longrightarrow \quad \underline{F \text{ no es base de } S} \ \left(\underline{F \text{ no es s.g. de } S}\right)$$

o bien:

No todo vector de S pertenece a $\mathcal{L}(F) = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1\}\right)$, por ejemplo:

$$\overline{u}_2 \neq \alpha \cdot \overline{u}_1 \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \underline{F \text{ no es s.g. de } S} \quad \Longrightarrow \quad \underline{F \text{ no es base de } S}$$

e.– Sea $F = B_1 \cup B_2$. ¿Es F libre? ¿Es F sistema generador de S? Hallar $\operatorname{r}(F)$.

Solución.–

$$F = \{\overline{u}_1 = (1, 0, -1, 1), \overline{u}_2 = (0, 1, 1, 0), \overline{v}_1 = (1, 1, 0, 1), \overline{v}_2 = (1, -1, -2, 1)\}$$

- $\underline{F \text{ es un sistema ligado}}$. *Para demostrar esta afirmación podemos proceder de varias maneras:*

$$\overline{v}_1 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 \quad \Longrightarrow \quad \underline{F \text{ no es s.libre}}$$

o bien:

$$\dim S = 2 < 4 = \operatorname{card} F \quad \Longrightarrow \quad \underline{F \text{ no es s.libre}}$$

- $\underline{F \text{ es un sistema generador de } S}$. *Al igual que en el caso anterior, podemos comprobarlo de varios modos:*

$$\underbrace{B_1}_{B_1 \text{ base de } S \;\Longrightarrow\; B_1 \text{ s.g. de } S} \subset F \quad \Longrightarrow \quad \underline{F \text{ s.g. de } S}$$

o bien:

$$S = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1, \overline{u}_2\}\right) \overset{\overline{v}_1 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2}{\overset{\downarrow}{=}} \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{v}_1\}\right) \overset{\overline{v}_2 = \overline{u}_1 - \overline{u}_2}{\overset{\downarrow}{=}} \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{v}_1, \overline{v}_2\}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{F \text{ s.g. de } S}$$

- $\underline{\mathrm{r}\,(F) = 2}$. *Vamos a presentar también dos métodos para su demostración:*

$$\mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{v}_1, \overline{v}_2\}\right) \overset{\overline{v}_2 = \overline{u}_1 - \overline{u}_2}{\overset{\downarrow}{=}} \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{v}_1\}\right) \overset{\overline{v}_1 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2}{\overset{\downarrow}{=}} \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1, \overline{u}_2\}\right) = S \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{r}\,(F) = \dim\left(\mathcal{L}(F)\right) = \dim S = 2$$

o bien: *escribimos los vectores de F como filas de una matriz A y calculamos el rango de esta matriz –utilizando operaciones elementales de fila–, pues $r(A) = r(F)$.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{F_3 - F_1}{F_4 - F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{F_3 - F_2}{F_4 + F_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Como las matrices A y B son equivalentes, tienen el mismo rango. Es inmediato calcular el rango de B pues, al tratarse de una matriz escalonada, su rango coincide con el número de las entradas principales, luego:

$$2 = \mathrm{r}\,(B) = \mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,(F)$$

f.– Completar la base B_1 hasta obtener una base B^* de $\mathbb{R}^4$.

Solución.–

Como sabemos que $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ y $\operatorname{card} B_1 = 2$, resulta evidente que B_1 no es base de $\mathbb{R}^4$. Debemos, por tanto, ir añadiendo vectores a B_1 para que, sin perder la condición de sistema libre, consigamos también un sistema generador de $\mathbb{R}^4$.

Conviene realizar este proceso con cierto cuidado y, en principio, se puede sugerir que:

- *se añadan los vectores de uno en uno, y*

- *se añadan vectores lo más sencillos posibles. ¿Cuáles? Los vectores de la base canónica, por ejemplo.*

Sin embargo, vamos a utilizar la relación que existe entre el rango de una familia de vectores y el rango de la matriz cuyas filas son esos vectores para ampliar la base B_1 *hasta conseguir una base* B^* *de* $\mathbb{R}^4$ *y lo vamos a hacer añadiendo todos los vectores necesarios de una sola vez.*

Se trata de construir una matriz cuadrada de orden 4, A, cuyo rango sea 4, es decir, tal que $\det A \neq 0$*, pero dos de sus filas han de ser los vectores de la base* B_1 *de* S*:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Tenemos que añadir dos filas a A *que se correspondan, preferentemente, con vectores de la base canónica de* $\mathbb{R}^4$ *de modo que* $\det A \neq 0$*. Para ello localizamos en las filas escritas en* A *una submatriz de orden 2 (pues sólo tenemos dos filas) cuyo determinante sea no nulo). "Debajo" de esa submatriz rellenamos las filas que nos faltan con ceros y los huecos restantes los llenamos de modo que añadamos dos vectores diferentes de la base canónica de* $\mathbb{R}^4$*. Por ejemplo:*

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array} \quad ; \quad A = \begin{array}{c} \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & - & - \\ 0 & 0 & - & - \end{pmatrix} \end{array} \quad ; \quad A = \begin{array}{c} \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

De esta forma, al desarrollar el determinante de A *por las filas añadidas resulta trivial de comprobar que es no nulo.*

Podemos justificar la respuesta al ejercicio del modo siguiente:

Sea A la matriz cuyas filas son los vectores de B^*, siendo:

$$B^* = \{\overline{u}_1 = (1, 0, -1, 1), \overline{u}_2 = (0, 1, 1, 0), \overline{e}_3 = (0, 0, 1, 0), \overline{e}_4 = (0, 0, 0, 1)\}$$

Se tiene que:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Aquí hay que justificar que esta afirmación es cierta y lo podemos hacer como hemos explicado antes desarrollando el determinante por las filas que hemos añadido.

Se tiene entonces que:

$$\left.\begin{array}{l} \det A \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{r}\,(B^*) = \mathrm{r}\,(A) = 4 \quad \Longrightarrow \quad B^* \text{ s. libre} \\ \dim \mathbb{R}^4 = 4 = \operatorname{card} B^* \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \underline{B^* \text{ base de } \mathbb{R}^4}$$

1.1. El espacio vectorial $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$

Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

a.– Hallar una base B y la dimensión del subespacio S formado por las matrices X tales que $A \cdot X = (0)_{3\times 3}$.

Solución.–

Lo primero que tenemos que hacer es ver que condiciones han de cumplir los elementos de una matriz $X \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ para que pertenezca a S. Para ello debemos realizar el producto $A \cdot X$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

e igualarlo a la matriz nula de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Esto nos llevará a un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con tantas incógnitas como elementos tiene la matriz X, es decir, con 6 incógnitas, y con tantas ecuaciones como elementos tiene la matriz $A \cdot X$ (9 ecuaciones).

$$\begin{aligned} A \cdot X &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ a+d & b+e & c+f \\ a+d & b+e & c+f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} a+d=0 \\ b+e=0 \\ c+f=0 \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} d=-a \\ e=-b \\ f=-c \end{array} \right. \end{aligned}$$

En este caso al igualar los nueve elementos de la matriz $A \cdot X$ con los nueve elementos correspondientes de la matriz nula de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, observamos que de las nueve ecuaciones que en principio obtenemos solamente hay tres ecuaciones diferentes y son las únicas que hemos escrito.

A continuación se procede del mismo modo que en cualquier problema de espacios vectoriales, utilizando las mismas técnicas explicadas para los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{P}_n$ y que ya hemos *utilizado anteriormente, pero sin olvidarnos de que estamos trabajando con matrices.*

$$S = \left\{ X \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) / \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = (0)_{3\times 3} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ -a & -b & -c \end{pmatrix} / a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \overset{*}{=}$$

Cuando conseguimos escribir los vectores de S de esta forma,
ya resulta inmediato encontrar un sistema generador de S.

$$\overset{*}{=} \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} / a, b, c \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \mathcal{L}\left(\left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Hemos demostrado entonces:

$$S = \mathcal{L}\left(\{A_1, A_2, A_3\}\right) \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \ \ S \text{ es subespacio vectorial de } \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \\ \bullet \ \ B = \{A_1, A_2, A_3\} \text{ es sistema generador de } S \end{array} \right.$$

Vamos a comprobar si B es también un sistema libre. Como B consta de tres matrices, si queremos demostrar que es un sistema linealmente independiente no podemos utilizar ningún "atajo". Debemos recurrir a la definición. Pero lo que si podemos utilizar es un resultado de la teoría de matrices que dice que un sistema de n vectores es linealmente independiente si y sólo si el rango de la matriz que tiene como filas a esos vectores es n. De hecho el rango de una familia de vectores y el rango de la matriz cuyas filas son los vectores de esa familia coinciden. Este resultado es de gran utilidad.

Surge inevitablemente una pregunta. ¿Cómo escribimos las matrices A_1, A_2, A_3 como filas de una matriz? La respuesta es bien sencilla e intuitiva. Basta con identificar cada una de las matrices con un vector de $\mathbb{R}^6$ es este caso de modo que si $A = (a_{ij})_{2\times 3}$, el vector con el que identificamos la matriz A es el vector:

$$\overline{x} = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23})$$

de modo que escribimos como las primeras componentes del vector la primera fila de la matriz, a continuación escribimos la segunda fila de la matriz y así hasta terminar con todas las filas de A.

Si consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tenemos que $r(A) = r(B)$ donde B es el sistema generador de S que hemos encontrado. Además es trivial calcular el rango de la matriz A pues al tratarse de una matriz escalonada bastará con contar el número de las entradas principales de la matriz. Tenemos entonces que:

$$\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(A) \quad \text{siendo} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(A) = 3 = \mathrm{card}(B) \quad \Longrightarrow \quad B \text{ s. libre}$$

Como hemos podido comprobar este método resulta muy sencillo para calcular el rango de una familia de vectores de los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{P}_n$ y $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Tenemos entonces que:

$$\left.\begin{array}{ll} B=\{A_1,A_2,A_3\} & \text{s. generador de } S \\ B=\{A_1,A_2,A_3\} & \text{s. libre}\end{array}\right\} \implies$$

$$\implies \quad \underline{B=\{A_1,A_2,A_3\} \ \text{ base de } S} \quad , \quad \underline{\dim S=3}$$

Como ya conocemos la dimensión del subespacio vectorial S resulta más sencillo, como ya se explicó en un ejercicio anterior, hallar otras bases de este mismo subespacio. Recordar que basta con hallar un sistema libre de S que conste de tantas matrices como la dimensión de S, que es 3.

b.–, d.– Hallar un s.g. G de S que no sea base de S. Calcular $\mathrm{r}\,(G)$.

Solución.–

Una base del subespacio vectorial S es un sistema generador de S que además es libre, de modo que si a esa base añadimos vectores de S seguiremos teniendo un sistema generador de S pero habremos perdido la condición de sistema libre porque el vector que hemos añadido es forzosamente una combinación lineal de los vectores de esa base. Sin embargo, si a esa base quitamos alguno de los vectores perdemos la condición de sistema generador de S pero todavía seguimos teniendo un sistema libre pues todo subconjunto de un conjunto libre es también un conjunto libre. Estos comentarios nos ayudarán a entender mejor las respuestas a los apartados b.– y c.– de este ejercicio.

Escogemos un conjunto G formado por las siguientes matrices:

$$\underline{G=\{A_1\,,\,A_2\,,\,A_3\,,\,A_4=A_1+A_2+A_3\}}$$

y procedemos a demostrar que cumple las condiciones pedidas en el enunciado como en cualquier ejercicio de espacios vectoriales y podemos proceder de distintas maneras:

- G es sistema generador de S, pues:

$$\underbrace{B}_{B \text{ base de } S \implies B \text{ s.g. de } S} \subset G \implies \underline{G \text{ s.g. de } S}$$

o bien:

$$S=\mathcal{L}\left(\{A_1,A_2,A_3\}\right) \overset{\overset{A_4=A_1+A_2+A_3}{\downarrow}}{=} \mathcal{L}\left(\{A_1,A_2,A_3,A_4\}\right) \implies \underline{G \text{ s.g. de } S}$$

- G no es base de S (no es sistema libre), pues:

$$\dim S=3<4=\operatorname{card} G \implies \underline{G \text{ no es base de } S} \ (\underline{G \text{ no es s.libre}})$$

o bien:

$$A_4=A_1+A_2+A_3 \implies \underline{G \text{ no es s.libre}} \implies \underline{G \text{ no es base de } S}$$

Un método muy sencillo para calcular el rango de G es el siguiente:

$$\underline{\mathrm{r}\,(G)=\dim\left(\mathcal{L}(G)\right)=\dim S=3}$$

c.–, d.– Hallar un s. libre F de S que no sea base de S. Calcular $\mathrm{r}\,(F)$.

Solución.–

Teniendo en cuenta los comentarios anteriores escogemos F el siguiente conjunto:

$$\underline{F = \{A_1\,,\,A_2\}}$$

Para demostrar que este conjunto F cumple las condiciones pedidas en el enunciado podemos proceder de varias maneras:

- F es un sistema libre de S, pues:

$$F \subset \underbrace{B}_{B \text{ base de } S \implies B \text{ s.libre}} \implies \underline{F \text{ s.libre}}$$

o bien:

$$A_1 \neq \alpha A_2 \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \quad \overset{\substack{\text{un sistema de dos vectores no nulos es libre si y sólo si no son múltiplos uno del otro} \\ \downarrow}}{\implies} \quad \underline{F \text{ s.libre}}$$

- F no es base de S (no es sistema generador de S), pues:

$$\dim S = 3 > 2 = \operatorname{card} F \implies \underline{F \text{ no es base de } S}\ \big(\underline{F \text{ no es s.g. de } S}\big)$$

o bien:

No todo vector de S pertenece a $\mathcal{L}(F) = \mathcal{L}\left(\{A_1, A_2\}\right)$, por ejemplo:

$$A_3 \neq \alpha_1 \cdot A_1 + \alpha_2 \cdot A_2 \quad \forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \implies \underline{F \text{ no es s.g. de } S} \implies \underline{F \text{ no es base de } S}$$

En este caso para calcular el rango de F lo más sencillo es utilizar el hecho de que F es un sistema libre como ya hemos demostrado:

$$\underline{\mathrm{r}\,(F) \overset{\substack{F \text{ s. libre} \\ \downarrow}}{=} \operatorname{card} F = 2}$$

e.– Ampliar la base B de S hasta obtener una base B^* de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

Solución.–

Utilizamos la misma técnica explicada en el problema de espacios vectoriales. En este caso es si cabe más sencillo todavía pues la base B de S que hemos encontrado nos lleva a una matriz escalonada y por tanto nos va a resultar muy sencillo el ampliar B hasta conseguir una base B^* de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array} \; ; \; \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & - & - & - \end{pmatrix} \end{array} \; ; \; A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dado que la matriz A es triangular superior su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal, es decir, no nulo, y además el rango de la matriz A coincide, como hemos explicado en otro apartado, con el rango de la familia de vectores (o matrices) B^* siguiente:

$$\underline{B^* = \{A_1\,,\,A_2\,,\,A_3\,,\,E_{21}\,,\,E_{22}\,,\,E_{23}\}}$$

donde

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos justificar la respuesta al ejercicio del modo siguiente:

Sea A la matriz cuyas filas son los vectores (matrices) de B^*, siendo:

$$B^* = \{A_1\,,\,A_2\,,\,A_3\,,\,E_{21}\,,\,E_{22}\,,\,E_{23}\}$$

donde

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Aquí hay que justificar que esta afirmación es cierta y len este caso lo podemos hacer fácilmente pues la matriz es traingular, luego su determinante es el producto de los elementos de su diagonal principal.

Se tiene entonces que:

Tenemos entonces que:

$$\left.\begin{array}{l} \det A \neq 0 \implies \mathrm{r}\,(B^*) = \mathrm{r}\,(A) = 6 \implies B^* \text{ s. libre} \\ \dim \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) = 6 = \operatorname{card} B^* \end{array}\right\} \implies \underline{B^* \text{ base de } \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})}$$