1. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Clasificar el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los distintos valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y resolverlo en los casos posibles:

$$\begin{array}{l} \alpha x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 - x_3 = -1 \\ \alpha x_1 + x_2 + \beta x_3 = -1 \\ \alpha x_1 + x_2 + x_3 = \ \ 1 \end{array}$$

Solución.–

Escribimos en primer lugar la matriz ampliada del sistema:

$$AM = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & -1 & -1 \\ \alpha & \beta & -1 & -1 \\ \alpha & 1 & \beta & -1 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para clasificar un sistema de ecuaciones lineales que dependa de uno o más parámetros, podemos:

1. *Si una de las dos matrices*

   A : *matriz de coeficientes del sistema*
   AM: *matriz ampliada del sistema*

   es cuadrada, comenzamos calculando el determinante de la matriz cuadrada[1].

2. *Otro método que resulta en general más eficaz, pero que según hemos explicado anteriormente no siempre es conveniente utilizar*[2], *es el método de Gauss, que nos permite clasificar y resolver un sistema (si éste es compatible), aunque dependa de uno o más parámetros.*

---

[1]Si A es una matriz cuadrada, supongamos $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, entonces $AM \in \mathcal{M}_{n\times n+1}(\mathbb{R})$. Se tiene que:

$$\begin{array}{l} \mathrm{r}(A) \leq n \quad ; \quad \mathrm{r}(AM) \leq n \\ \mathrm{r}(A) \leq \mathrm{r}(AM) \\ \mathrm{r}(A) = n \quad \Longleftrightarrow \quad \det A \neq 0 \end{array}$$

Por lo tanto,

$$\det A \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(AM) = n = \text{nro. de incógnitas} \quad \Longrightarrow \quad \text{S.C.D.}$$

Si la matriz que es cuadrada es AM, digamos $AM \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, entonces $A \in \mathcal{M}_{n\times n-1}(\mathbb{R})$, entonces:

$$\begin{array}{l} \mathrm{r}(A) \leq n-1 \quad ; \quad \mathrm{r}(AM) \leq n \\ \mathrm{r}(A) \leq \mathrm{r}(AM) \\ \mathrm{r}(AM) = n \quad \Longleftrightarrow \quad \det AM \neq 0 \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\det AM \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{r}(A) < \mathrm{r}(AM) = n \quad \Longrightarrow \quad \text{S.I.}$$

[2]La razón por la que no es siempre conveniente utilizar el método de Gauss para clasificar un S.E.L. que dependa de parámetros, es que no siempre es conveniente aplicar operaciones elementales de fila a una matriz cuyos elementos dependen de parámetros.

En nuestro ejercicio, $A \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$ y $AM \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$, luego empezamos calculando el determinante de la matriz ampliada AM:

$$\det AM = \begin{vmatrix} \alpha & -1 & -1 & -1 \\ \alpha & \beta & -1 & -1 \\ \alpha & 1 & \beta & -1 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{F_1+F_4\\F_2+F_4\\F_3+F_4}}{=} \begin{vmatrix} 2\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 2\alpha & \beta+1 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 2 & \beta+1 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\alpha(\beta+1)^2$$

$$\left.\begin{array}{rcl} A \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R}) & \Longrightarrow & \mathrm{r}(A) \leq 3 \\ AM \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}) & \Longrightarrow & \left\{\begin{array}{l} \bullet \ \ \mathrm{r}(AM) \leq 4 \\ \bullet \ \ \mathrm{r}(AM) = 4 \text{ sii } \det AM \neq 0 \end{array}\right. \\ A \text{ submatriz de } AM & \Longrightarrow & \mathrm{r}(A) \leq \mathrm{r}(AM) \end{array}\right\} \quad (*)$$

Como sabemos que $\det AM = 2\alpha(\beta+1)^2$ *y teniendo en cuenta* $(*)$*, comenzamos a clasificar el sistema. Nos surgen, en nuestro problema y en principio, tres casos*[3]*:*

Caso 1.– $\underline{\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq -1}$.

Caso 2.– $\underline{\alpha = 0}$[4].

Caso 3.– $\underline{\beta = -1}$[5].

Una vez calculado el determinante de la matriz ampliada (que es cuadrada en nuestro ejercicio), conviene comenzar la clasificación por el que hemos denominado caso 1.–:

• $\underline{\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq -1}$: $\det AM \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{r}(AM) = 4 \overset{\substack{\mathrm{r}(A)\leq 3\\ \downarrow}}{>} \mathrm{r}(A) \quad \Longrightarrow \quad$ S.I.

Pasamos ahora a estudiar el caso 2.–:

• $\underline{\alpha = 0}$: sabemos que:

$$\begin{array}{ccc} \det AM = 0 & \Longrightarrow & \mathrm{r}(AM) \leq 3 \\ \text{y además} & & \mathrm{r}(A) \leq 3 \end{array}$$

Es decir, para $\alpha = 0$ las matrices A y AM pueden tener el mismo rango.

Escribimos las matrices A y AM para $\alpha = 0$:

$$AM = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \beta & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \beta & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Recordemos que para clasificar el sistema necesitamos saber la relación que existe entre los rangos de la matriz de coeficientes A y la matriz ampliada AM del sistema. Podemos recurrir a cualquiera de las técnicas que hemos explicado en otro capítulo.

[3] Como el determinante de la matriz ampliada se anula para dos valores diferentes de los parámetros los tres casos son: uno para cada uno de estos valores y el otro que es cuando el determinante no se anula. Si posteriormente surgen o no distintos "subcasos" no lo sabemos todavía.

[4] Esto realmente significa: $\alpha = 0$ y β cualquiera.

[5] Como en el caso anterior, esto quiere decir: $\beta = -1$ y α cualquiera.

Como la primera columna de la matriz AM es una columna nula podemos prescindir de ella para calcular los rangos de A y AM, pero además, la fila 4 de la matriz AM es la -1 veces la fila 1 de AM, luego podemos prescindir también de la fila 4 de AM (y de A) para calcular el rango de las matrices A y AM[6]:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \qquad ; \qquad BM = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -1 \\ \beta & -1 & -1 \\ 1 & \beta & -1 \end{array}\right)$$

donde

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) \qquad \text{y} \qquad \mathrm{r}(AM) = \mathrm{r}(BM)$$

Para determinar el rango de las matrices A y AM trabajamos respectivamente con las "nuevas" matrices B y BM, pero no podemos olvidar que la matriz del sistema es AM.

Trabajando con las matrices B y BM para determinar los rangos de las matrices A y AM, tenemos que, para $\alpha = 0$:

$$\bullet\ \underline{\alpha = 0} \qquad \left.\begin{array}{rcl} B \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) & \Longrightarrow & \mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(A) \leq 2 \\ BM \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) & \Longrightarrow & \left\{\begin{array}{l} \bullet\ \ \mathrm{r}(BM) = \mathrm{r}(AM) \leq 3 \\ \bullet\ \ \mathrm{r}(BM) = \mathrm{r}(AM) = 3 \ \text{ sii } \ \det BM \neq 0 \end{array}\right. \\ B \ \text{ submatriz de } \ BM & \Longrightarrow & \mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(A) \leq \mathrm{r}(AM) = \mathrm{r}(BM) \end{array}\right\} \quad (**)$$

Podemos empezar calculando el determinante de la matriz BM:

$$\det BM = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ \beta & -1 & -1 \\ 1 & \beta & -1 \end{vmatrix} \overset{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1}}{=} \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ \beta+1 & 0 & 0 \\ 2 & \beta+1 & 0 \end{vmatrix} = -(\beta+1)^2$$

Teniendo en cuenta $(**)$ y el valor del determinante de BM, vemos que dentro del caso 2.– ($\alpha = 0$), existen, en principio, diferentes "subcasos":

$\bullet\bullet$ $\underline{\alpha = 0 \wedge \beta \neq -1}$: $\det BM \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{r}(AM) = 3 \overset{\substack{\mathrm{r}(A)\leq 2 \\ \downarrow}}{>} \mathrm{r}(A) \quad \Longrightarrow \quad$ <u>S.I.</u>

$\bullet\bullet$ $\underline{\alpha = 0 \wedge \beta = -1}$: $\det BM = 0$ En este caso sustituimos α 0 y β por -1:

$$AM = \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Para determinar el rango de las matrices A y AM prescindimos de las filas 1 y 2 de la matriz AM pues son múltiplos de la fila 4:

$$BM = \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \mathrm{r}(BM) = \mathrm{r}(AM) \leq 2$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(AM) = 2$$

[6] Las matrices AM y BM tienen el mismo rango, pero en ningún caso podemos escribir que son matrices equivalentes pues tienen dimensiones diferentes.

Por lo tanto:

$\bullet\bullet$ $\underline{\alpha = 0 \wedge \beta = -1}$: $\mathrm{r}(AM) = \mathrm{r}(A) = 2 < 3 =$ nro. incógnitas $\Longrightarrow$ S.C.I.

Para resolver el sistema en este caso, podemos utilizar el método de Gauss o bien, resolver el sistema directamente, si es que es sencillo. En cualquier caso conviene saber cuales son las **incógnitas principales** *y cuales son las* **incógnitas libres**. *Como M_2 (menor de orden 2 no nulo de la matriz A, y por tanto, de la matriz AM) está formado por las columnas 2 y 3 de la matriz AM, esto significa que x_2 y x_3 son las incógnitas principales del sistema y x_1 la incógnita libre.*

Resolvemos el sistema escribiendo únicamente las ecuaciones principales que se corresponden con las filas del menor M_2 no nulo, es decir, son las ecuaciones 3 y 4 del sistema:

$$\begin{array}{l} x_2 - x_3 = -1 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{array} \quad \text{con } x_1 \text{ incógnita principal}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_2 - x_3 = -1 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{array}\right\} \overset{x_1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}}{\overset{\downarrow}{\Longrightarrow}} \left\{\begin{array}{l} x_1 = a \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{array}\right. \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

De modo que:

$\bullet\bullet$ $\underline{\alpha = 0 \wedge \beta = -1}$: $\mathrm{r}(AM) = \mathrm{r}(A) = 2 < 3 =$ nro. incógnitas $\Longrightarrow$ S.C.I. $\underline{(a, 0, 1)\ \forall a \in \mathbb{R}}$

Nos queda por estudiar el que hemos denominado caso 3.–: $\beta = -1$. Procedemos como en el caso anterior, escribiendo la matriz AM para $\beta = -1$.

$\bullet$ $\underline{\beta = -1}$: *sabemos que:*

$$\begin{array}{lcl} \det AM = 0 & \Longrightarrow & r(AM) \leq 3 \\ \textit{y además} & & r(A) \leq 3 \end{array}$$

$$AM = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & -1 & -1 & -1 \\ \alpha & -1 & -1 & -1 \\ \alpha & 1 & -1 & -1 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Podemos prescindir de la columna 4 de la matriz AM pues coincide con la columna 3, lo cual significa que los rangos de las matrices A y AM van a coincidir en este caso, y por tanto, el sistema va a ser siempre compatible. Además podemos prescindir de la fila 1 de AM pues coincide con la fila 2:

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & -1 \\ \alpha & 1 & -1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(AM)$$

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(AM) = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad \det B \neq 0$$

Por lo tanto:

$\bullet$ $\underline{\beta = -1}$: $\mathrm{r}(AM) = \mathrm{r}(A) \quad \Longrightarrow \quad$ S.C.

Para decidir si el sistema es compatible determinado o compatible indeterminado ya hemos razonado que tenemos que calcular el determinante de la matriz cuadrada B

$$\det B = \begin{vmatrix} \alpha & -1 & -1 \\ \alpha & 1 & -1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1}}{=} \begin{vmatrix} \alpha & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4\alpha$$

Por lo tanto, tenemos que distinguir también dos "subcasos":

•• $\underline{\beta = -1 \ \wedge \ \alpha \neq 0}$: $\mathrm{r}(AM) = \mathrm{r}(A) = 3 =$ nro. incógnitas $\Longrightarrow$ S.C.D.

•• $\underline{\beta = -1 \ \wedge \ \alpha = 0}$: $\mathrm{r}(AM) = \mathrm{r}(A) < 3 =$ nro. incógnitas $\Longrightarrow$ S.C.I. Caso ya estudiado.

Para resolver el sistema (compatible determinado) cuando $\beta = -1$ y $\alpha \neq 0$ conviene aplicar el método de Gauss pues es un sistema con 3 incógnitas. Las únicas ecuaciones que debemos tener en cuenta son la segunda, tercera y cuarta, pues como ya hemos mencionado, la primera ecuación es la misma que la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} \alpha x_1 - x_2 - x_3 &= -1 \\ \alpha x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ \alpha x_1 + x_2 + x_3 &= \ \ 1 \end{aligned}$$

Escribimos la matriz ampliada de este nuevo sistema equivalente al inicial y realizamos operaciones elementales de fila hasta conseguir un sistema "triangular" de resolución inmediata[7]:

$$CM = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & -1 & -1 & -1 \\ \alpha & 1 & -1 & -1 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{F_1+F_3 \\ F_2+F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 2 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Con lo cual:

•• $\underline{\beta = -1 \ \wedge \ \alpha \neq 0}$: $\mathrm{r}(AM) = \mathrm{r}(A) = 3 =$ nro. incógnitas $\Longrightarrow$ S.C.D. $\underline{(0, 0, 1)}$

Por último, conviene "resumir" la solución del ejercicio con los distintos casos y subcasos:

•	$\underline{\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq -1}$	$\mathrm{r}(AM) = 4 < \mathrm{r}(A)$	$\Longrightarrow$	S.I.	
••	$\underline{\alpha = 0 \wedge \beta \neq -1}$	$\mathrm{r}(AM) = 3 < \mathrm{r}(A)$	$\Longrightarrow$	S.I.	
••	$\underline{\alpha = 0 \wedge \beta = -1}$	$\mathrm{r}(AM) = \mathrm{r}(A) = 2 <$ nro. incógnitas	$\Longrightarrow$	S.CI.	$\underline{(a, 0, 1)\ \forall a \in \mathbb{R}}$
••	$\underline{\alpha \neq 0 \wedge \beta = -1}$	$\mathrm{r}(AM) = \mathrm{r}(A) = 3 =$ nro. incógnitas	$\Longrightarrow$	S.C.D.	$\underline{(0, 0, 1)}$

Podíamos haber utilizado el método de Gauss desde el principio para clasificar el sistema:

$$AM = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & -1 & -1 & -1 \\ \alpha & \beta & -1 & -1 \\ \alpha & 1 & \beta & -1 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{F_1+F_4 \\ F_2+F_4 \\ F_3+F_4}}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 2\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 2\alpha & \beta+1 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 2 & \beta+1 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Esto nos permite una clasificación inmediata del sistema de ecuaciones lineales:

[7] Normalmente procedemos haciendo ceros por debajo de la "diagonal principal" de la matriz ampliada del sistema.

- $\underline{\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq -1}$ $\quad \mathrm{r}(AM) = 4 > \mathrm{r}(A) \quad \Longrightarrow \quad$ S.I.
- $\underline{\alpha = 0 \wedge \beta \neq -1}$ $\quad \mathrm{r}(AM) = 3 > \mathrm{r}(A) = 2 \quad \Longrightarrow \quad$ S.I.
- $\underline{\alpha = 0 \wedge \beta = -1}$ $\quad \mathrm{r}(AM) = \mathrm{r}(A) = 2 <$ nro. incógnitas $\Longrightarrow$ S.CI.
- $\underline{\alpha \neq 0 \wedge \beta = -1}$ $\quad \mathrm{r}(AM) = \mathrm{r}(A) = 3 =$ nro. incógnitas $\Longrightarrow$ S.C.D.