Espacios vectoriales euclídeos

1. Lo primero

$<<$ `LinearAlgebra‘Orthogonalization‘`

2. Producto escalar

En general, un producto escalar se cargará como una función de dos variables:

`pe[x_,y_]:=`

2.1. El producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$

Si $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ son vectores que cargaremos en *Mathematica* como dos listas de nombres `x` e `y`:

`Dot[x,y]` o `x·y`

2.2. Otros productos escalares en $\mathbb{R}^n$

Se cargan como una función de dos variables. Recordemos que para seleccionar la componente i–ésima (x_i) del vector $\overline{x}$, que habremos cargado como una lista de nombre `x`:

`x[[i]]`

2.3. Productos escalares en $\mathcal{P}_n$

- Si el producto escalar está definido en función de los coeficientes de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$, basta con escribir los coeficientes del polinomio como una lista y trabajar con estas listas como si fueran vectores de $\mathbb{R}^n$.

  Los coeficientes de un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \in \mathcal{P}_n$ los podemos escribir en *Mathematica* como una lista del modo siguiente:

  `Table[(D[p[x],{x, i}]/. {x ->0})/i!,{i, 0, n}]`

  Recordar que la lista que obtenemos es:

  $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$

  y cargaremos el polinomio como una función de una variable.

- Si el producto escalar está definido en función de distintos valores que toman los polinomios, simplemente cargaremos el producto escalar como una función de dos variables y definiremos los polinomios como funciones de una variable.

2.4. Producto escalar usual en $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

Al escribir los elementos de una matriz como una lista:

```
Flatten[m]
```

estamos identificando una matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con un vector de $\mathbb{R}^{2n}$.

2.5. Producto escalar usual en $\mathcal{C}_{[a,b]}$

Cargamos las funciones como funciones de una variable (`x`) y el producto escalar:

```
pe[f_,g_]:=Integrate[f*g,{x,a,b}]
```

3. Matrices de Gram

1. Cargamos la base B como una lista de listas o de funciones, según proceda, de nombre `b`.
2. `gb=Table[pe[b[[i]],b[[j]]],{i,Length[b]},{j,Length[b]}]`.

Si estamos trabajando en $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual:

```
gb=Table[b[[i]]·b[[j]],{i,Length[b]},{j,Length[b]}]
```

4. Bases ortogonales y ortonormales

Si hemos cargado la base de un espacio vectorial euclídeo que queremos ortogonalizar como una lista de nombre `u` y hemos definido el producto escalar como una función de nombre `pe`:

```
w=GramSchmidt[u,InnerProduct->pe]//Simplify
```

Por defecto, la función `GramSchmidt` ortonormaliza.
Si estamos trabajando en $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual:

```
w=GramSchmidt[u]//Simplify
```

5. Mejor aproximación en un espacio vectorial euclídeo

Si `v` es el vector que queremos aproximar en un espacio vectorial euclídeo del que hemos hallado en el apartado anterior una base ortogonal que hemos llamado `w`:

```
Sum[Projection[v,w[[i]],InnerProduct->pe],{i,Length[w]}]//Simplify
```

Si trabajamos en $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual no es necesario teclear:

```
InnerProduct->pe
```

6. Ejercicios

1. Definir en $\mathbb{R}^3$ el producto escalar.

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$$

2. Hallar la matriz de Gram en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar del apartado anterior.

3. En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual hallar una base ortogonal del subespacio vectorial:

$$S = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1 = (1,0,1,0), \overline{u}_2 = (1,-1,0,1), \overline{u}_3 = (0,1,1,-1)\}\right)$$

4. Hallar la mejor aproximación de $\overline{v} = (1,2,3,4)$ en el subespacio S del apartado anterior.

5. Idem para el vector $\overline{v}_1 = (1,-2,-1,2)$.

6. Resolver de forma aproximada el sistema incompatible:

$$x \cdot \overline{u}_1 + y \cdot \overline{u}_2 = \overline{v}$$