Sistemas de ecuaciones y espacios vectoriales

1. Las funciones LinearSolve, Solve y Reduce

Para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales utilizaremos las funciones `Solve`, `LinearSolve` y `Reduce`. Los argumentos de estas funciones se explican con detalle en la práctica. A modo de resumen podemos decir:

Sistema sin parámetros	`Solve[`{lista de ecuaciones}`,`{lista de incógnitas}`]` `LinearSolve[A,b]`
Sistema con parámetros	`Reduce[`{lista de ecuaciones}`,`{lista de incógnitas}`]`

Las funciones `Solve` y `Reduce` se pueden utilizar para resolver ecuaciones o sistemas de ecuaciones no necesariamente lineales. Sin embargo, la función `LinearSolve` se utiliza para resolver una ecuación matricial de la forma $A \cdot X = B$, donde B puede ser un vector o una matriz.

Si el sistema es compatible, la función `Solve` nos devuelve como una lista las posibles soluciones del sistema. La función `LinearSolve` devuelve una solución del sistema que queremos resolver, si el sistema tiene solución. La función `Reduce` debemos utilizarla para resolver sistemas de ecuaciones lineales con parámetros.

2. Algo más sobre la función Reduce

```
In[1]:= Reduce[{2 a x + b y + 2 z == 1, 2 a x + (2 b - 1) y + 3 z == 1, 2 a x + b y + (b + 3) z == 2 b - 1}, {x, y, z}]
```

$$\text{Out[1]}= (b == 1 \,\&\&\, y == 1 - 2\,a\,x \,\&\&\, z == 0) \,||\, \left(b == 5 \,\&\&\, a == 0 \,\&\&\, y == -\frac{1}{3} \,\&\&\, z == \frac{4}{3}\right) \,||\, \left(a\,(-1+b)\,(1+b) \neq 0 \,\&\&\, x == \frac{5-b}{2\,a\,(1+b)} \,\&\&\, y == \frac{1}{3}\,(4 - b - 4\,a\,x - 2\,a\,b\,x) \,\&\&\, z == \frac{1}{3}\,(-1 + b - 2\,a\,x + 2\,a\,b\,x)\right)$$

El sistema que estamos clasificando y resolviendo es:

$$\begin{aligned} 2ax + by + 2z &= 1 \\ 2ax + (2b-1)y + 3z &= 1 \\ 2ax + by + (b+3)z &= 2b - 1 \end{aligned}$$

Lo primero que tenemos que hacer es "traducir" la salida de `Reduce`, teniendo en cuenta que solamente aparece cuando el sistema es compatible y que las incógnitas que aparecen a la izquierda de las igualdades lógicas son las incógnitas principales del sistema siempre que éste tenga solución

$b = 1$	S.C.I.	2 incógnitas principales: y, z
$a = 0 \wedge b = 5$	S.C.I.	2 incógnitas principales: y, z
$a \neq 0 \wedge b \neq \pm 1$	S.C.D.	3 incógnitas principales: x, y, z

Al tratarse de un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas el sistema solamente será compatible determinado cuando el determinante de la matriz de coeficientes del sistema (A), sea distinto de cero; luego:

$$\det A \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a \neq 0 \,\wedge b \neq \pm 1$$

Como $\det A$ se anula para tres valores de los parámetros, entonces, en principio, nos salen cuatro casos:

$$\begin{array}{l} a \neq 0 \,\wedge b \neq \pm 1 \\ a = 0 \\ b = 1 \\ b = -1 \end{array}$$

Ordenamos la respuesta comenzando por el caso en que el sistema es compatible determinado, que es lo que haríamos para resolver este sistema "a mano" y seguimos viendo, de forma ordenada, si los diferentes caso (o subcasos) aparecen reflejados en la respuesta de `Reduce`; si no es así, significa que el sistema es incompatible.

•	$a \neq 0 \,\wedge b \neq \pm 1$	S.C.D.
••	$a = 0 \,\wedge b = 5$	S.C.I.
••	$a = 0 \,\wedge b \neq 5, 1$	S.I.
•	$b = 1$	S.C.I.
•	$b = -1$	S.I.

Las soluciones las copiaríamos de la salida de `Reduce` después de simplificarlas.

Teniendo en cuenta el teorema de Rouché–Frobenius podemos deducir información sobre los rangos de las matrices A y AM del sistema.

S.C.D.	$\mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,(AM)$ =nro. incógnitas
S.C.I.	$\mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,(AM)$ =nro. incógnitas principales
S.I.	$\mathrm{r}\,(A) < \mathrm{r}\,(AM)$

3. Expresiones algebraicas

`Expand`	desarrolla productos y potencias positivas
`ExpandAll`	desarrolla productos y potencias (positivas y negativas)
`Simplify`	realiza las transformaciones oportunas para devolver la expresión más sencilla posible

4. Operaciones con polinomios

Podemos cargar un polinomio como:

- una expresión algebraica
- una función

Si cargamos los polinomios como expresiones:

Suma de matrices	`pol1+pol2`
Producto de polinomios	`Expand[pol1*pol2]`
Cociente de polinomios	`PolynomialReduce[pol1, pol2, x]`
	`PolynomialQuotient[pol1, pol2, x]`
	`PolynomialRemainder[pol1, pol2, x]`

5. Espacios vectoriales

- Para escribir polinomios (es decir, sus coeficientes) como filas de una matriz:

  ```
  Table[(D[p[x],{x, i}]/. {x ->0})/i!,{i, 0, n}]
  ```

  donde hemos cargado el polinomio como una función de variable x y recuperamos los coeficientes como una lista cuyo primer elemento es el término independiente y el último elemento el coeficiente de x^n.

  También podemos utilizar la función

  `CoefficientList[polinomio,variable]`

  que nos devolverá la lista de los coeficientes de las potencias de la variable en el polinomio, empezando con la potencia cero.

- Para escribir matrices (es decir, sus elementos como filas de una matriz:

  ```
  Flatten[m]
  ```

6. Ejercicios

1. Utilizando las funciones adecuadas, clasifica y resuelve el sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro real m:

   $$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z & = & 6 \\ 2x+3y+4z & = & 9 \\ 3x+4y+mz & = & 2m \end{array}\right.$$

   ¿Cuál es la solución, si es que existe, para $m=0$?

   Explica la relación que existe entre los rangos de la matriz de coeficientes del sistema (A) y la matriz ampliada del sistema (AM), en función de los valores de $m \in \mathbb{R}$.

2. Clasifica y resuelve, cuando sea posible, el sistema de ecuaciones lineales:

   $$\left\{\begin{array}{rcl} ax-2y+z & = & 1 \\ x+ay+z & = & a \\ x+z & = & 1 \end{array}\right.$$

   en función de los valores de $a \in \mathbb{R}$.

3. Definir en *Mathematica* un polinomio de $\mathcal{P}_3$ como una función de una variable.

   $$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

4. Utilizando la función `Solve`, hallar todos los polinomios de $\mathcal{P}_3$ que cumplan estas dos condiciones:

   $$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = 0 \qquad ; \qquad p''(2) = 0$$

5. Utilizando el operador de reemplazamiento escribir cómo han de ser los polinomios de $\mathcal{P}_3$ que pertenecen al subespacio:

$$S = \left\{ p(x) \in \mathcal{P}_3 / \int_{-1}^{1} p(x)\, dx = 0 \wedge p''(2) = 0 \right\}$$

6. Hallar una base y la dimensión del subespacio vectorial S:

$$S = \mathcal{L}\left(\{A_1, A_2, A_3, A_4\}\right) \subset \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

siendo:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$