Integración

Desde su origen, la noción de integral ha respondido a necesidades geométricas como el cálculo de áreas y volúmenes.

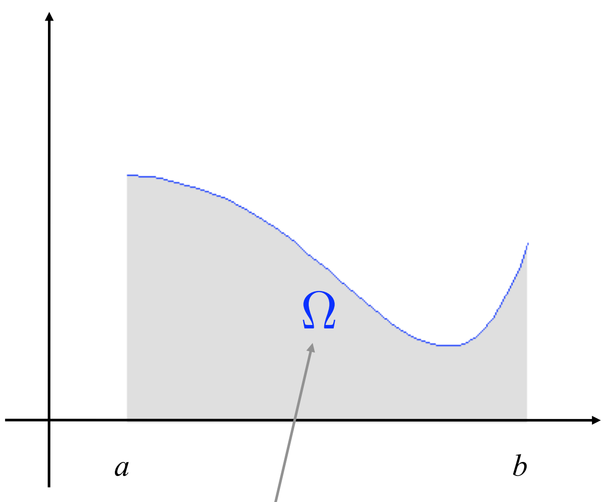
La técnica de integración se desarrolló sobre todo a partir del siglo XVII, paralelamente a los avances que tuvieron lugar en las teorías sobre derivadas y en el cálculo diferencial.

La idea de la integral indefinida supuso un avance más en el camino de la abstracción emprendido por las matemáticas modernas. La integral (indefinida) asume la condición de función en sí, susceptible de formar parte de ecuaciones y descripciones de modelos en el gran marco de las teorías del Análisis Matemático.

Integral definida: interpretación geométrica

Estamos familiarizados con las fórmulas de áreas de figuras geométricas tales como rectángulos, triángulos y circunferencias.

En la figura adjunta hemos representado una región Ω, limitada en su parte superior por la gráfica de una función continua no negativa f, en su parte inferior por el eje x, a su izquierda por la recta $x=a$ y a su derecha por la recta $x=b$. El problema que nos planteamos es el siguiente: ¿Qué número, si lo hubiese, puede ser considerado como el área de Ω?



$$\int_a^b f(x)dx$$

Integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

El símbolo de la integral fue introducido por Leibniz. En realidad es la S estirada de "suma". Los números *a* y *b* se denominan *límites de integración* (*a* es el *límite inferior* y *b* es el *límite superior*).

La letra *x* es una "variable muda"; en otras palabras, puede ser sustituida por cualquier otra letra no utilizada hasta el momento. Así, por ejemplo, no existe ninguna diferencia entre:

$$\int_a^b f(x)\,dx\,, \quad \int_a^b f(t)\,dt \quad \text{y} \quad \int_a^b f(z)\,dz$$

Integral indefinida

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \text{siendo } F'(x) = f(x)$$

La constante *C* se denomina *constante de integración*; es una constante arbitraria porque se le puede asignar cualquier valor real.

La integral indefinida de una función *f* es realmente una familia de funciones. Sin embargo, la integral definida es un número.

Si *f* es continua en [*a*,*b*] y *F* es una antiderivada de *f* en [*a*,*b*], se verifica que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Regla de Barrow

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \in \mathbb{Q},\, r \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \qquad \int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

Integración por partes

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$$

Se trata de expresar la función que queremos integrar como producto de otras dos, de manera que:

- **Una de ellas sea la derivada de otra ya conocida, es decir, podamos escribir nuestro integrando de la forma *udv*.**
- **La integral de *vdu* sea más fácil que la de *udv*.**

Sustitución. Cambio de variable

Si $\int f\big(u(x)\big)u'(x)\,dx = F\big(u(x)\big) + C$ entonces $\int f(t)\,dt = F(t) + C$

¿Cómo saber cuál es el cambio de variable adecuado? Desgraciadamente no hay una respuesta mágica que conteste a la pregunta. A veces, tendremos que probar varios cambios de variable hasta conseguir uno bueno. Con la práctica iremos adquiriendo mejor intuición. Como norma general, el cambio de variable nos tiene que servir para simplificar la función.

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

Y además…

Conviene dar algunas otras pautas para simplificar el trabajo del cálculo de primitivas:

- **Funciones racionales:**
  1. Dividir, si es necesario, los polinomios.
  2. Factorizar el denominador.
  3. Expresar la función racional como suma de fracciones simples.
  4. Integrar cada fracción simple.
- **Funciones trigonométricas:**

  Un método que siempre funciona es realizar el denominado cambio universal:

$$\tan x/2 = t \quad \Longrightarrow \quad dx = ?$$

  Sin embargo, en determinadas situaciones se pueden utilizar otras técnicas o realizar otros cambios de variable más sencillos.
- **Funciones irracionales**

APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

- Cálculo de áreas de figuras planas. (Secciones cónicas).
- Cálculo de volúmenes de sólidos de revolución.
- Cálculo de volúmenes.
- Cálculo de longitud de arco de curva.
- Cálculo de áreas de superficies de revolución.
- Cálculo de densidad y centros de masa, velocidad y trabajo.
- Cálculo de densidad de probabilidad. Medias.