Números reales

En este capítulo trataremos algunas cuestiones de gran interés relacionadas fundamentalmente con el conjunto de los números reales.

Nos centraremos en los conceptos de valor absoluto de un número real, hablaremos de las desigualdades y sus propiedades y recordaremos cómo resolver inecuaciones.

- **Intervalos**
- **Valor absoluto de un número real**

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- **Algunas propiedades del valor absoluto**

$$|x| = |-x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

- **Algunas preguntas**

¿Cuánto vale el valor absoluto del número –3?

¿Y el de –*a*, con *a* un número real?

¿Conoces alguna otra definición de valor absoluto?

RESOLVIENDO ECUACIONES

- Ecuaciones lineales
- Ecuaciones de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ con } a \neq 0$$

- Ecuaciones polinómicas de grado mayor que 2

  Regla de Ruffini **División de polinomios**

- Ecuaciones con raíces

$$2x - 1 + \sqrt{x} = 0$$ ¿Soluciones?

- Ecuaciones exponenciales

$$2^{3-x} = 32$$ ¿Soluciones?

- Ecuaciones logarítmicas

$$\ln(2x - 1) + 4 = \ln 3$$ ¿Soluciones?

INECUACIONES

- **Desigualdades: propiedades**

$$a \leq b \quad \Longrightarrow \quad a \pm c \leq b \pm c$$

$$a \leq b \quad \overset{c \geq 0}{\Longrightarrow} \quad a \cdot c \leq b \cdot c$$

$$a \leq b \quad \overset{c \leq 0}{\Longrightarrow} \quad a \cdot c \geq b \cdot c$$

- **Un ejercicio. Resolver la inecuación:**

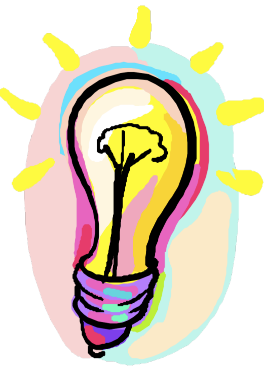
$$\frac{(x-3)^7(x-2)^6(x^3+1)}{2x^3-3x^2+1} \leq 0$$

- **Desigualdades con valor absoluto**

$$|x^2-2x-3| \geq x+2$$

Regla de Ruffini

La regla de Ruffini es un procedimiento esquemático para hallar el cociente y el resto de la división de un polinomio cualquiera por otro de la forma $x + a$.



Dividir $p(x)=2x^4-3x^3+5x^2-6x+10$ entre $x-2$.

Disponer los coeficientes del polinomio p(x) del modo siguiente :

	2	-3	5	-6	10
		+	+	+	+
2		4	2	14	16
	2	1	7	8	26

Factorial

$$n \in \mathbb{N} \qquad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

$$0! = 1$$

Números combinatorios

$$\binom{n}{i} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdots (n-i+1)}^{i \text{ factores}}}{i!}$$

Triángulo de Tartaglia

El triángulo de Tartaglia, también conocido como triángulo de Pascal, puede resultar útil para calcular de manera sencilla números combinatorios.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

En el triángulo de Tartaglia se ven reflejadas propiedades de los números combinatorios, como:

$$\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i} \qquad\qquad \binom{n+1}{i+1} = \binom{n}{i+1} + \binom{n}{i}$$

Binomio de Newton

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}b^n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

No es necesario recordar esta fórmula, pues $a-b=a+(-b)$

Se tiene que:

$$(a-b)^n = (a+(-b))^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}(-b)^i = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

Relación entre el triángulo de Tartaglia y el binomio de Newton: Los coeficientes de la forma desarrollada de $(a+b)^n$ se encuentran en la línea "$n+1$" del triángulo de Tartaglia.

1. **Factorizar los polinomios del numerador y del denominador**

$$\frac{(x-3)^7(x-2)^6(x^3+1)}{2x^3-3x^2+1}=\frac{(x-3)^7(x-2)^6(x+1)(x^2-x+1)}{2(x-1)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

2. **“Simplificar” la expresión**

$$\frac{(x-3)^7(x-2)^6(x+1)(x^2-x+1)}{2(x-1)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}\leq 0 \iff \frac{(x-3)(x+1)}{x+\frac{1}{2}}\leq 0 \ \wedge\ x\neq 1$$

3. **Construir un cuadro de variación de los signos de cada factor**

-1 $\quad -\frac{1}{2}$ $\quad 1$ $\quad 2$ $\quad 3$

Signo					
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+\frac{1}{2}$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x-3)(x+1)}{(x+\frac{1}{2})}$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$