Programación lineal

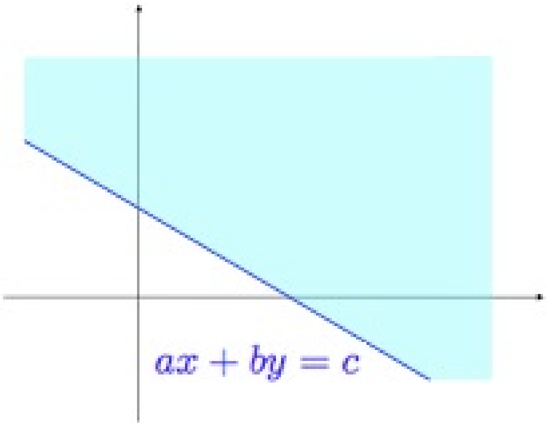
La programación lineal es una técnica matemática relativamente reciente, del siglo XX, que consiste en una serie de métodos y procedimientos que permiten resolver problemas de optimización en el ámbito, sobre todo, de las Ciencias Sociales.

Nos centraremos en este tema en aquellos problemas simples de programación lineal, es decir, aquellos que tienen solamente dos variables, problemas bidimensionales.

Una inecuación en el plano viene dada por una desigualdad del tipo:

$$ax + by \geq c \qquad \text{o} \qquad ax + by \leq c$$

y la solución corresponde a un semiplano.



La recta de ecuación:

$$ax + by = c$$

divide al plano en dos semiplanos. Para saber cual de los dos se corresponde con la solución de la desigualdad, basta con escoger un punto que no esté en la recta. Si para ese punto se cumple la desigualdad, el semiplano solución es el correspondiente al punto.

REGIÓN FACTIBLE

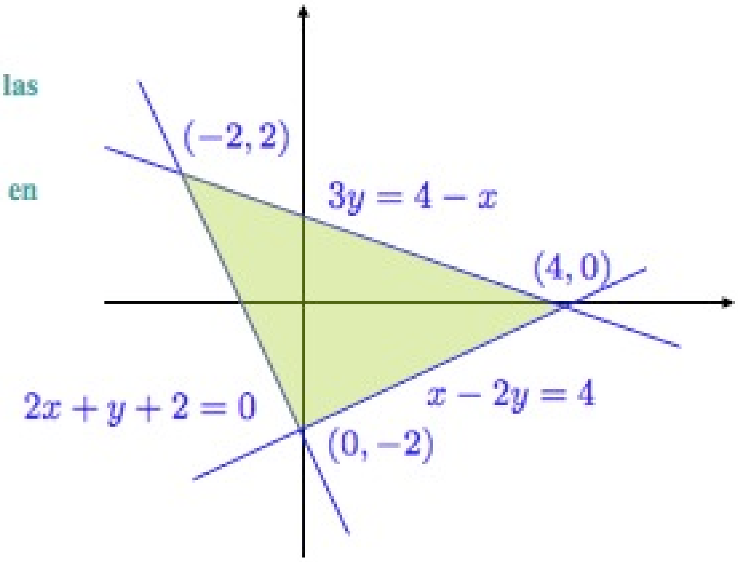
Ejercicio.- Representar gráficamente la región del plano limitada por las desigualdades:

$$x - 2y \leq 4 \qquad 2x + y + 2 \geq 0 \qquad 3y \leq 4 - x$$

1.- Representar las rectas en el plano.

2.- Hallar los puntos de corte entre las rectas.

3.- Sombrear la región que tienen en común las tres desigualdades.



La solución de un sistema de inecuaciones lineales en el plano se corresponde con una región convexa del plano denominada región factible.

FORMULACIÓN GENERAL DE UN PROBLEMA DE PROGRAMCIÓN LINEAL

En un problema de programación lineal intervienen:

La función que queremos optimizar y que denominamos función objetivo:

$$z(x, y) = ax + by + c$$

Las variables de decisión son x e y, mientras que a, b y c son constantes.

Las restricciones, que son inecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{lcl} r_1 & \equiv & a_1 x + b_1 y \leq c_1 \\ r_2 & \equiv & a_2 x + b_2 y \leq c_2 \\ \ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_n & \equiv & a_n x + b_n y \leq c_n \end{array}\right\}$$

Al conjunto de todos los pares (x, y) que satisfacen todas las inecuaciones se le denomina región factible.

La solución óptima del problema es un par (x_0, y_0) del conjunto factible para el que la función objetivo $z(x, y)$ toma el valor máximo o mínimo.

Se denomina teorema de la programación lineal al siguiente resultado:

Teorema de la programación lineal

Sea el problema de optimización de la función:

$$z(x, y) = ax + by + c$$

con restricciones lineales:

$$\left.\begin{array}{lcl} r_1 & \equiv & a_1x + b_1y \leq c_1 \\ r_2 & \equiv & a_2x + b_2y \leq c_2 \\ \cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_n & \equiv & a_nx + b_ny \leq c_n \end{array}\right\}$$

Si la función objetivo tiene un máximo o un mínimo, éstos se alcanzarán en alguno de los vértices de la región factible.

Ejercicio.- Hallar los valores máximo y mínimo de la función F(x,y)=x+y en la región limitada por las desigualdades:

$$x - 2y \leq 4 \qquad 2x + y + 2 \geq 0 \qquad 3y \leq 4 - x$$

1.- Representar la región factible.

Se puede proceder de dos formas diferentes:

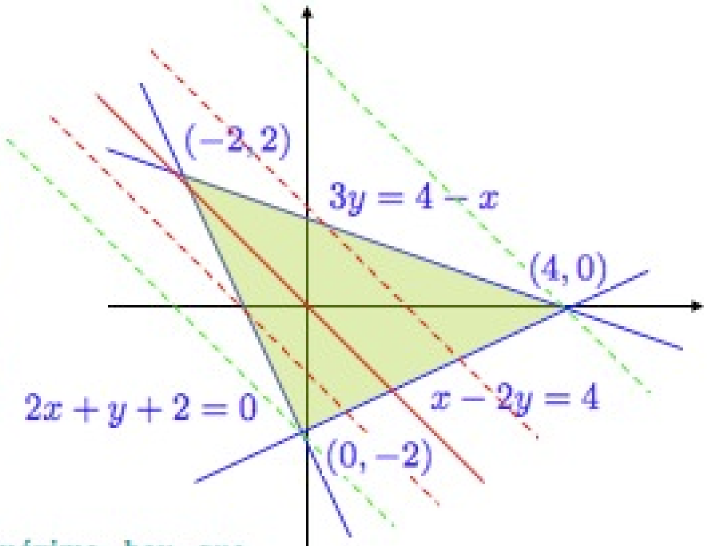
2.- Representar una línea de nivel.

Una línea de nivel es cualquier recta de la forma $z(x, y) = c$ (constante), donde $z(x,y)$ es la función objetivo.

3.- Para obtener el máximo, hay que desplazar la línea de nivel en la dirección perpendicular $\vec{u}(a, b)$, siendo la función objetivo:

$$z(x,y) = ax + by.$$

4.- Para obtener el mínimo y el máximo hay que desplazar la línea de nivel en la dirección perpendicular $\vec{u}(-a, -b)$, hasta tocar los vértices de la región factible

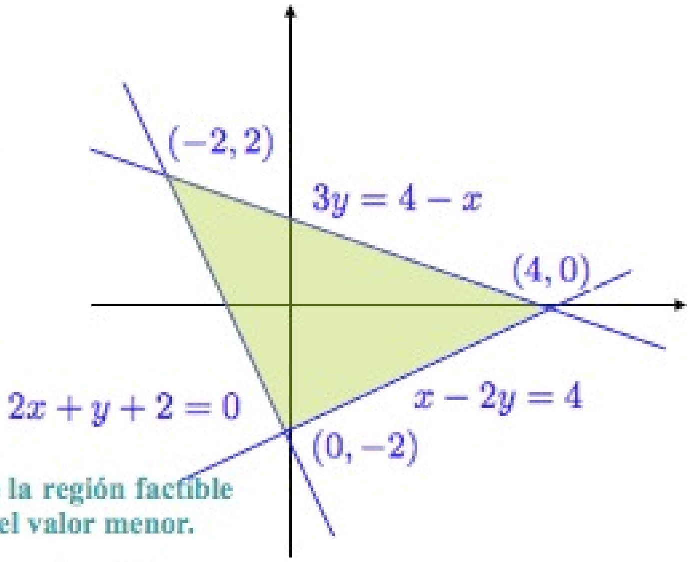


Ejercicio.- Hallar los valores máximo y mínimo de la función F(x,y)=x+y en la región limitada por las desigualdades:

$$x - 2y \leq 4 \qquad 2x + y + 2 \geq 0 \qquad 3y \leq 4 - x$$

1.- Representar la región factible.

También podemos proceder del modo siguiente:



2.- Evaluar la función objetivo en los vértices de la región factible:

$$\begin{aligned} F(-2,2) &= 0 \\ F(0,-2) &= -2 \\ F(4,0) &= 4 \end{aligned}$$

3.- El máximo se alcanza en el vértice de la región factible para el cual la función objetivo toma el valor mayor.

4.- El mínimo se alcanza en el vértice de la región factible para el cual la función objetivo toma el valor menor.

5.- Si el máximo o el mínimo se alcanza en dos vértices, se alcanza en todo el segmento que los une.