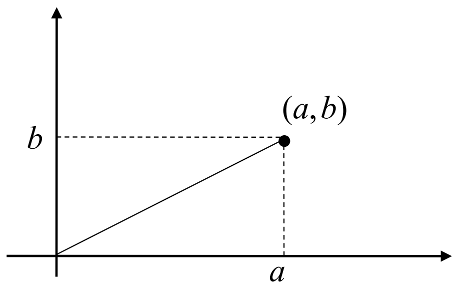
Números complejos

En la resolución de ecuaciones algebraicas de segundo grado o de orden superior, con frecuencia aparecen casos en que las soluciones contienen radicales de números negativos. Esta operación de radicación produce un resultado que no pertenece al conjunto de los números reales.

Ecuaciones de expresiones tan sencillas como $x^2+1=0$, no tienen soluciones reales.

Por esta razón se ideó un nuevo conjunto denominado conjunto de los números complejos.

CÓMO ESCRIBIR UN NÚMERO COMPLEJO



Forma cartesiana (a, b)

Identificamos un número complejo con un punto del plano

Forma binómica $a + bi$ $\quad i = \sqrt{-1}$

donde a es la parte real, b la parte imaginaria e i la unidad imaginaria

Forma polar r_α

donde r es el módulo del número complejo y α es el ángulo que forma el semieje positivo con la semirrecta que une el origen con el número

Forma trigonométrica $r\,(\cos\alpha + i\,\sin\alpha)$

CÓMO CALCULAR EL MÓDULO Y EL ARGUMENTO DE NÚMERO COMPLEJO

El módulo *r* de un número complejo cuya forma binómica es *a+bi* se calcula del modo siguiente:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

El argumento principal α de un número complejo cuya forma binómica es *a+bi* se calcula del modo siguiente:

- **Si está en el primer cuadrante:** $\alpha = \arctan \frac{b}{a}$
- **Si está en el segundo cuadrante:** $\alpha = \arctan \frac{b}{a} + \pi$
- **Si está en el tercer cuadrante:** $\alpha = \arctan \frac{b}{a} + \pi$
- **Si está en el cuarto cuadrante:** $\alpha = \arctan \frac{b}{a} + 2\pi$

$$\alpha \in [0, 2\pi)$$

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

Conjugado de un número complejo

$$a - bi$$

Suma

En forma cartesiana o binómica: se suman las partes reales e imaginarias

Producto

En forma cartesiana o binómica

En forma polar: se multiplican los módulos y se suman los argumentos

Cociente

En forma cartesiana o binómica: multiplicar y dividir por el conjugado del denominador

En forma polar: se dividen los módulos y se restan los argumentos

Fórmula de De Moivre

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

Raíces de un número complejo

Si z es un número complejo y n un número natural, decimos que w es una raíz n-ésima de z si $w^n = z$

Dado z un número complejo no nulo, existen exactamente n raíces n-ésimas de z:

$$z = r_\alpha \quad \Longrightarrow \quad w_k = \sqrt[n]{r}_{(\alpha+2k\pi)/n} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$