1.– Utilizar el método de Gauss para clasificar y resolver –cuando sea posible– los siguientes sistemas:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x-5y+3z &=& 4 \\ x-2y+z &=& 3 \\ 5x+y+7z &=& 11 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcl} x-3y+7z &=& 10 \\ 5x-y+z &=& 8 \\ x+4y-10z &=& -11 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcl} x-3y-2z &=& 7 \\ 2x-y+15z &=& 3 \\ x-8y-21z &=& 11 \end{array}\right\}$$

<u>Solución</u>

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x-5y+3z &=& 4 \\ x-2y+z &=& 3 \\ 5x+y+7z &=& 11 \end{array}\right\} \implies x=5 \quad ; \quad y=0 \quad ; \quad z=-2$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x-3y+7z &=& 10 \\ 5x-y+z &=& 8 \\ x+4y-10z &=& -11 \end{array}\right\} \implies \left(1+\frac{2z}{7}, -3+\frac{17z}{7}, z\right) \forall\, z \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x-3y-2z &=& 7 \\ 2x-y+15z &=& 3 \\ x-8y-21z &=& 11 \end{array}\right\} \ \text{S.I.}$$

2.– Clasificar y resolver cuando sea posible los siguientes sistemas, según los distintos valores de los respectivos parámetros:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+kz &=& 1 \\ kx+(k-1)y+z &=& k \\ x+y+z &=& k+1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcl} x+y+2z &=& 3 \\ x+2y+3z &=& 5 \\ x+3y+mz &=& 7 \end{array}\right\}$$

<u>Solución</u>

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+kz &=& 1 \\ kx+(k-1)y+z &=& k \\ x+y+z &=& k+1 \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{l} \bullet \ \ k \neq 1 \quad \implies \quad \text{S.C.D.} \\ \quad z=\dfrac{k}{1-k} \quad ; \quad y=(1+k)k \quad ; \quad x=\dfrac{k^3-k^2-2k+1}{1-k} \\ \\ \bullet \ \ k=1 \quad \implies \quad \text{S.I.} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+2z &=& 3 \\ x+2y+3z &=& 5 \\ x+3y+mz &=& 7 \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{l} \bullet \ \ m \neq 4 \quad \implies \quad \text{S.C.D.} \\ \quad x=1 \quad ; \quad y=2 \quad ; \quad z=0 \\ \\ \bullet \ \ m=4 \quad \implies \quad \text{S.C.I.} \\ \quad (x, 1+x, 1-x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

3.– Clasifica y resuelve, cuando sea posible, los siguientes sistemas, utilizando el método de Gauss:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z+t &=& 1 \\ x-y+z-t &=& 0 \\ x+y-z-t &=& -1 \\ x+y+z-t &=& 2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcl} 2x+y+3z &=& 0 \\ 4x+2y-z &=& 0 \\ 6x+3y+2z &=& 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcl} x-y+3z-14t &=& 0 \\ 2x-2y+3z+t &=& 0 \\ 3x-3y+5z+6t &=& 0 \end{array}\right\}$$

<u>Solución</u>

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z+t &=& 1 \\ x-y+z-t &=& 0 \\ x+y-z-t &=& -1 \\ x+y+z-t &=& 2 \end{array}\right\} \implies x=-1 \quad ; \quad y=1 \quad ; \quad z=\frac{3}{2} \quad ; \quad t=\frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x+y+3z &=& 0 \\ 4x+2y-z &=& 0 \\ 6x+3y+2z &=& 0 \end{array}\right\} \implies \left(-\frac{y}{2}, y, 0\right) \quad \forall\, y \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x-y+3z-14t &=& 0 \\ 2x-2y+3z+t &=& 0 \\ 3x-3y+5z+6t &=& 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad (x,x,0,0) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

4.– Resuelve el sistema matricial siguiente:

$$A+B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2A-2B=\begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>*Solución*</u>

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.– Calcula el valor de los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -168 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 0 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 385 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -25 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

6.– Comprueba que las siguientes matrices son regulares y calcula la matriz inversa de cada una de ellas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>*Solución*</u>

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & -12 & 4 \\ 2 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad C^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

7.– Calcula la matriz X tal que

$$A \cdot B + C \cdot X = D,$$

siendo

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \; ; \; B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \; ; \; C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \; ; \; D=\begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$$

Solución

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8.– Sean $A \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})\,, B \in \mathcal{M}_{1\times 3}(\mathbb{R})$ y $C \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$. Indicar cuáles de los siguientes productos son posibles, así como el orden de la matriz resultante:

$$A\cdot(B\cdot C) \quad ; \quad A\cdot C\cdot B \quad ; \quad B\cdot C\cdot A \quad ; \quad B^T\cdot C^T\cdot A \quad ; \quad (B\cdot C)^T\cdot A^T$$

Solución

$$A\cdot(B\cdot C) \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}) \quad ; \quad (B\cdot C)^T\cdot A^T \in \mathcal{M}_{1\times 2}(\mathbb{R})$$

9.– Dadas la matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular A^2, $A\cdot B$, $-3A+8C$ y $A + C\cdot(C-A)$.

Solución

$$A^2 = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 3 \\ 18 & 5 & 6 \\ 22 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad ; \quad A\cdot B = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 10 & 23 \\ 16 & 23 \end{pmatrix}$$

$$-3A+8C = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 18 & 0 & -1 \\ -4 & -3 & 10 \end{pmatrix} \quad ; \quad A + C\cdot(C-A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & -4 & 3 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

10.– Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Se sabe que las dos tienen su determinante igual a 1. ¿Hay datos suficientes para calcular los valores de a y b? En caso afirmativo hallar dichos valores, en caso negativo razonar el motivo.

Solución

$$a = 3 \qquad ; \qquad b = 8$$