Cálculo de primitivas:

- $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$, siendo $F(x)$ una *antiderivada* de $f(x)$, es decir, siendo $F(x)$ tal que

$$F'(x) = f(x)$$

  La constante C se denomina *constante de integración*; es una constante *arbitraria* porque se le puede asignar cualquier valor real.

- La integral indefinida de una función f es realmente una *familia* de funciones. Sin embargo, la integral definida es un número.

- Si f es continua en $[a, b]$ y F es una antiderivada de f en $[a, b]$, se verifica que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

- Propiedades de la integral indefinida.

  La operación consistente en obtener la primitiva de una función dada se denomina integración, que es la inversa de la derivación. Por esta razón, utilizando las propiedades de la derivación es posible determinar algunas propiedades de la integración.

  Las siguientes propiedades de linealidad sirven para descomponer integrales complicadas en otras más sencillas:

  - La integral de la suma de dos funciones es igual a la suma de las integrales de cada una de ellas.

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

  - La integral del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la integral de la función.

$$\int (\alpha \cdot f(x))\,dx = \alpha \cdot \int f(x)\,dx$$

Integrales inmediatas: En la tabla siguiente se resumen las reglas de integración de las funciones más comunes.

Es frecuente que la función a integrar parezca a primera vista una función no contemplada en la tabla de integrales inmediatas. No obstante, a veces bastan algunas sencillas operaciones aritméticas en dicho integrando (reducir potencias, aplicar fórmulas trigonométricas, racionalizar fracciones, etcétera) para obtener una integral inmediata.

Un truco muy socorrido para convertir una integral en inmediata consiste en "buscar el logaritmo". Si se consigue transformar el integrando de manera que se componga de un numerador que sea la derivada del denominador, la integral será inmediata: el logaritmo neperiano de la función pertinente.

- $\displaystyle\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \in \mathbb{Q},\ r \neq -1)$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
- $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$
- $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
- $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$
- $\displaystyle\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

Métodos de integración: Las operaciones de integración de funciones pueden llegar a ser muy complicadas. Para facilitarlas se han ideado diversos procedimientos generales, de los cuales los más extendidos son los llamados métodos de sustitución o cambio de variable y de integración por partes.

- ► *Integración por partes.*

$$\boxed{\int u\,dv = u \cdot b - \int v\,du}$$

Se trata de expresar la función que queremos integrar como producto de otras dos, de manera que:

1. Una de ellas sea la derivada de otra ya conocida, es decir, podamos escribir nuestro integrando de la forma $u\,dv$.
2. La integral de $v\,du$ sea más fácil que la de $u\,dv$.

Ejemplo.– Calcular:

$$\int x \cos x\,dx$$

Utilizamos el método de integración por partes para calcular esta primitiva:

$$\begin{aligned} \int x\cos x dx &= \left[\begin{array}{lll} u = x & \Longrightarrow & du = dx \\ \cos x\,dx = dv & \Longrightarrow & v = \sin x \end{array} \right] = x\sin x - \int \sin x\,dx = \\ &= x\sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

En general, podemos decir que si se trata de integrar una función del tipo:

$$\int f(x)g(x)\,dx$$

donde $f(x)$ es un polinomio y $g(x)$ es una de las funciones siguientes: e^{ax}, $\sin ax$, $\cos ax$, $\arcsin ax$, $\arctan ax$, $\ln ax$, $\ldots$; o bien $f(x)$ es una función seno o coseno y $g(x)$ es una función exponencial; puede resultar conveniente utilizar el método de integración por partes.

- ► *Sustitución. Cambio de variable*

Esta técnica consiste en introducir una nueva variable t para sustituir a una expresión apropiada del integrando, de manera que la expresión resultante sea más fácil de integrar.

$$\text{Si} \quad \int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C \quad \text{entonces} \quad \int f(t)\,dt = F(t) + C$$

¿Cómo saber cuál es el cambio de variable adecuado? Desgraciadamente no hay una respuesta mágica que conteste a la pregunta. A veces, tendremos que probar varios cambios de variable hasta conseguir uno bueno. Con la práctica iremos adquiriendo mejor intuición. Como norma general, el cambio de variable nos tiene que servir para simplificar la función, para eliminar algo molesto.

Ejemplo.– Calcular:

$$\int \sin^4 x \cos x\,dx$$

Utilizamos el cambio de variable $\sin x = t$ para calcular esta primitiva, pues se simplifica notablemente:

$$\int \sin^4 x \cos x\,dx = \left[\begin{array}{lll} \sin x = t & \Longrightarrow & dt = \cos x\,dx \end{array} \right] = t^4\,dt = \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

Conviene dar algunas otras pautas para simplificar el trabajo del cálculo de primitivas:

- ► *Funciones racionales*

1. Dividir, si es necesario, los polinomios.
2. Factorizar el denominador.
3. Expresar la función racional como suma de fracciones simples.
4. Integrar cada fracción simple.

▶ *Funciones trigonométricas*

Un método que siempre funciona es realizar el denominado *cambio universal*:

$$\tan x/2 = t \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\[2ex] \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\[2ex] dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2} \end{cases}$$

Aunque en determinadas situaciones se pueden utilizar otras técnicas o realizar otros cambios de variable más sencillos.

▶ *Funciones irracionales*

Las primitivas de ciertas funciones irracionales son muy sencillas de calcular después de realizar unos sencillos cambios de variable. En ocasiones basta con aplicar la técnica de "completar cuadrados" para conseguir una integral inmediata o bien una integral muy simple de calcular. Hay situaciones en las que resulta muy conveniente utilizar cambios trigonométricos.

1.– Calcular:

a.– $\displaystyle\int \tan x\,dx$

b.– $\displaystyle\int \frac{2x^2+9x+1}{x^3-3x-2}\,dx$

c.– $\displaystyle\int \frac{x+1}{x-1}\,dx$

d.– $\displaystyle\int \ln x\,dx$

e.– $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx$

f.– $\displaystyle\int x\cdot e^x\,dx$

g.– $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{(1+x^2)^2}\,dx$

h.– $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$

i.– $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$

j.– $\displaystyle\int e^x\cdot\cos x\,dx$

k.– $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2+2x+3}\,dx$

l.– $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

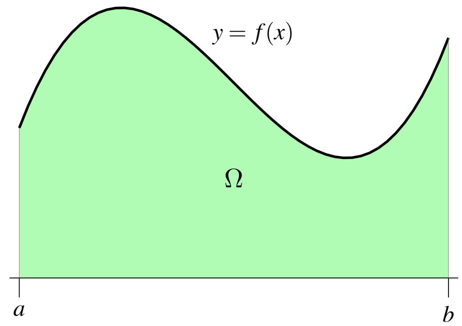
m.– $\displaystyle\int \frac{1}{7+3\,\sin x+7\cos x}\,dx$

n.– $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

o.– $\displaystyle\int \frac{2x^5-3x^4+x^3-3x^2-6x+1}{x^5-2x^4+2x^3-4x^2+x-2}\,dx$

p.– $\displaystyle\int x^3\sqrt{1-x}\,dx$

Estamos familiarizados con las fórmulas de áreas de figuras geométricas regulares tales como rectángulos, triángulos y circunferencias. En la figura adjunta hemos representado una región Ω limitada en su parte superior por la gráfica de una función continua no negativa f, en su parte inferior por el eje x, a la izquierda por la recta $x = a$ y a la derecha por la recta $x = b$. El problema que nos planteamos es el siguiente: ¿Qué número, si lo hubiese, puede ser considerado como el área de Ω?



Integral definida:

► $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$.

El símbolo $\int$ fue introducido por Leibniz y se llama *signo integral.* En realidad es la S estirada de *Suma.* Los números a y b se denominan *límites de integración* (a es el *límite inferior* y b es el *límite superior*).

En la expresión

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

la letra x es una "variable muda"; en otras palabras, puede ser sustituida por cualquier otra letra no utilizada hasta el momento. Así, por ejemplo, no existe ninguna diferencia entre

$$\int_a^b f(x)\,dx\,, \quad \int_a^b f(t)\,dt \quad \text{y} \quad \int_a^b f(z)\,dz$$

Todas estas expresiones designan la integral definida de f de a a b.

En la introducción a este capítulo se ha proporcionado una aplicación inmediata de la integral definida: si f es no negativa en $[a, b]$, entonces

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

da el área debajo de la gráfica de f.

► Propiedades de la integral definida.

La integral definida cumple las siguientes propiedades:

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
- Cuando la función $f(x)$ es mayor que cero, su integral es positiva; si la función es menor que cero, su integral es negativa.
- $\displaystyle\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

- $\displaystyle\int_a^b (\alpha \cdot f(x))\, dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\, dx.$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx.$
- Si $a < c < b$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

2.– Calcular el área del recinto limitado por las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ en el intervalo $[-1, 1]$.

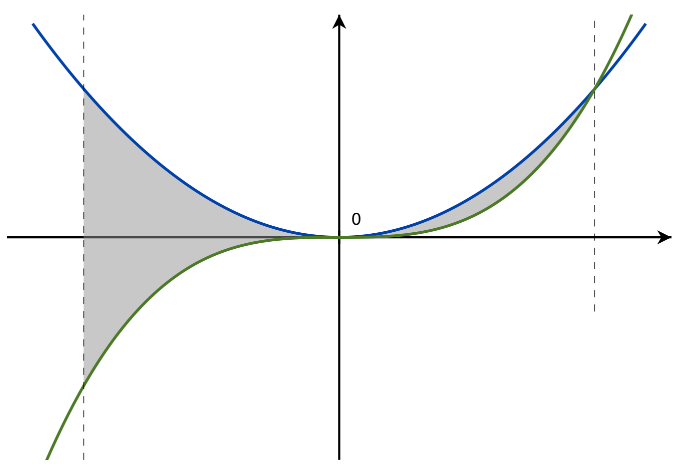
<u>*Solución*</u>

Teniendo en cuenta que si f y g son dos funciones continuas sobre el intervalo (a, b) tales que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in (a, b)$, se tiene que el área de la región limitada por las curvas f y g y por las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ se puede calcular mediante la integral:

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx,$$

procedemos del modo siguiente:

Paso 1. Representar graficamente las funciones y la región de la que queremos calcular el área.



Paso 2. Hallar los puntos de corte entre las dos curvas.

$$f(x) = g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0, 1$$

Paso 3. Como las curvas se cortan eso significa que ninguna de las dos curvas está siempre por encima de la otra curva en $\mathbb{R}$. Puede ocurrir dos cosas:

- Si una de las dos curvas ($f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [-1, 1]$) está siempre por encima de la otra curva en el intervalo $[-1, 1]$, se tiene que:

$$\text{Área} = \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))\, dx$$

- En caso contrario dividimos el intervalo $[-1, 1]$ en subintervalos de modo que en cada uno de ellos una de las dos curvas está siempre por encima de la otra y podemos aplicar el resultado arriba mencionado.

En nuestro ejercicio se cumple que

$$f(x) = x^2 \geq x^3 = g(x) \quad \forall\, x \in [-1, 1]$$

por lo tanto

$$\text{Área} = \int_{-1}^{1} (x^2 - x^3)dx = \frac{2}{3}$$

3.– Calcular el área encerrada por una elipse cualquiera.

4.– Dibujar la región limitada por las curvas siguientes y calcular el área de dicha región:

a.– $x + y^2 - 4 = 0, \quad x + y = 2$

b.– $x^2 - 2x - 2y + 5 = 0, \quad y^2 - 4y - 2x + 6 = 0$

5.– Dada la función

$$f(x) = 3 + \frac{1}{2 - x}$$

calcular su inversa, si es que existe.

6.– Calcular la siguiente primitiva

$$\int \frac{2x + A}{x^2 + 4} dx$$

en función del valor de A.

7.– Se considera el recinto finito del plano limitado por la recta $x = 1$, la parábola $y = x^2$ y la curva $y = \dfrac{8}{x}$.

Trazar un esquema del recinto y calcular su área.

8.– Representar gráficamente y calcular el área de la región (finita) limitada por las curvas

$$y = \sqrt{x} \qquad\qquad y = x^2$$

9.– Calcular la siguiente primitiva

$$\int \frac{x^2 - A^2}{x^2 + A^2} dx$$

en función del valor de A, teniendo en cuenta que $A > 0$.

10.– El rectángulo de vértices $V_1 = (0, 0)$, $V_2 = (A, 0)$, $V_3 = (0, A^2)$ y $V_4 = (A, A^2)$ queda dividido en dos recintos por la curva de ecuación $f(x) = x(A - x)$.

Trazar un esquema de ambos recintos y calcular sus áreas.

11.– Hallar el área del recinto limitado por el eje de abscisas, la parábola $y = x^2$ y la recta tangente a esta parábola en el punto de abscisa $x = 2$.

12.– La curva $y = x^3$, su recta tangente en el punto $x = 2$ y el eje OX limitan en el primer cuadrante un recinto finito del plano. Dibujar un esquema gráfico de dicho recinto y calcular su área.

13.– El área del recinto limitado por la curva $y = a^2 - x^2$ y el eje de abscisas es $32/3$. Hallar el valor de a.

14.– Calcular la primitiva que sigue en función de a y b

$$\int x^2 e^{ax+b} dx$$

15.– Se considera el rectángulo de vértices $V_1 = (0, 27)$, $V_2 = (5, 27)$, $V_3 = (5, -4)$ y $V_4 = (0, -4)$. La curva $y = x^3$ divide a dicho rectángulo en dos zonas. Trazar un esquema gráfico y calcular el área de cada zona.

16.– Representar gráficamente y hallar el área del recinto (finito) limitado por la curva $y = 2 - x^2$ y las bisectrices de los cuadrantes primero y segundo, situado por encima del eje horizontal.

17.– Calcular la siguiente integral indefinida en función de los parámetros a, b y c.

$$\int e^{ax} \left(x^2 + bx + c\right) dx$$

18.– Sea P_1 la parábola de ecuación $y = x(4 - x)$, y sea P_2 la parábola de ecuación $y = (x - 4)(x - 2)$. Dibujar un esquema gráfico del recinto finito del plano limitado por dichas parábolas. hallar el área del recinto mediante cálculo integral.

19.– Representar gráficamente la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 4 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

y hallar el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje de abscisas.

20.– La parábola $y = 4 - x^2$, su recta tangente en $x = 1$ y el eje OY limitan un recinto finito en el plano.

Dibujar un esquema de dicho recinto y hallar su área mediante cálculo integral.

21.– Hallar el área de la figura OAB, en la que O es el origen de coordenadas, $A = (-1, 1)$, $B = (2, 1)$, los lados OB y AB son segmentos rectilíneos y OA es un arco de la curva $y = x^2$.