Derivada de una función en un punto: El concepto de derivada de una función matemática se halla íntimamente relacionado con la noción de límite. Así, la derivada se entiende como la variación que experimenta la función de forma instantánea, es decir, entre cada dos puntos de su dominio suficientemente próximos entre sí.

Para calcular la derivada de una función en un punto no es, en general, necesario recurrir a la definición. Normalmente se utilizan primero las propiedades generales de la derivación, para reducirla a una serie de funciones simples conocidas, cuyas derivadas se obtienen directamente a partir de una tabla de derivadas de las funciones elementales.

Recordamos a continuación las reglas para derivar la suma, producto, cociente y composición de funciones:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\alpha \cdot f)'(x) = \alpha \cdot f'(x)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$
- $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Recordemos que antes de derivar un cociente de funciones suele ser conveniente simplificar la expresión si es posible.

Tabla de derivadas: Para derivar cualquier función basta con conocer las propiedades de la derivación (ya mencionadas) y, con objeto de simplificar los cálculos, memorizar las fórmulas genéricas de las derivadas de las funciones potenciales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, que recordamos en la tabla adjunta:

- $\dfrac{d}{dx}k = 0$
- $\dfrac{d}{dx}x^n = n \cdot x^{n-1}$
- $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$
- $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$
- $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$
- $\dfrac{d}{dx}\arcsin x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
- $\dfrac{d}{dx}\arccos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\dfrac{d}{dx}\tan x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $\dfrac{d}{dx}\arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}$

1.– Derivar las siguientes funciones:

a.– $f(x) = \left(\dfrac{1}{x} - \sin x\right)^3$

b.– $f(x) = \left(\ln[(x \cdot \cos x)^4]\right)^7$

c.– $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+\tan x}{\cos(x+7)}}$

d.– $f(x) = \sqrt[3]{7x + \sqrt{x}}$

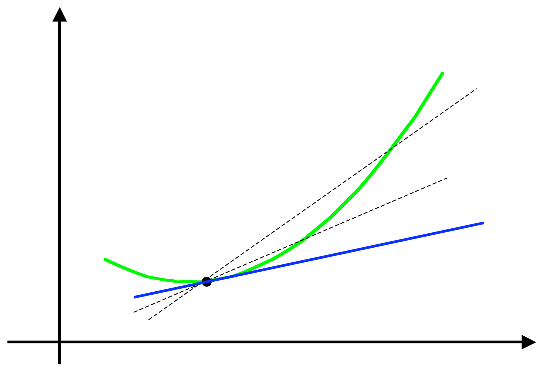
e.– $f(x) = \sqrt[5]{\cos^4(\tan x)}$

f.– $f(x) = \ln\left[\left(\dfrac{x^3+3x-1}{x \cdot e^x}\right)^3\right]$

g.– $f(x) = 3^x \cdot \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right)$

h.– $f(x) = \ln(\arctan x)$

Recta tangente y derivada: Consideremos una función f y elijamos un punto $(x, f(x))$ en su gráfica. ¿Qué recta, si existe, debería llamarse tangente a la gráfica en ese punto?



Para contestar a esta pregunta, elijamos un número pequeño $h \neq 0$ y marquemos los puntos $(x, f(x))$ y $(x+h, f(x+h))$. Podemos ahora dibujar la secante que pasa por estos dos puntos. Somos capaces de calcular la pendiente de cada una de estas rectas secantes.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La recta tangente, si es que existe, se definirá como la recta que pasa por el punto $(x, f(x))$ y cuya pendiente es el límite de las pendientes de las rectas secantes.

2.– Hallar las rectas tangentes a las gráficas de las funciones siguientes en el punto cuya abscisa se indica:

a.– $f(x) = \sqrt{1+x}$ en $x = 3$

b.– $f(x) = \sin x$ en $x = 0$

c.– $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ en $x = -2$

<u>*Solución*</u>

Para calcular la tangente a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{1+x}$ en el punto de abscisa $x = 3$ calculamos en primer lugar la derivada de la función f en el punto $x = 3$:

$$f(x) = (1+x)^{1/2} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \quad \Longrightarrow \quad f'(3) = \frac{1}{4}$$

Teniendo en cuenta que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $(x_0, f(x_0))$ es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

podemos concluir:

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x-3) \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

3.– Sea la función real:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \leq 0 \\ x - ax^2 & x > 0 \end{cases}$$

¿Existen valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuáles la función f es derivable en todo $\mathbb{R}$? Justificar la respuesta y en caso afirmativo calcular esos valores.

4.– Hallar los puntos críticos y clasificar los valores extremos de la función f definida en $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ por

$$f(x) = x^2 - 2|x| + 2$$

5.– Hallar los puntos críticos y clasificar todos los valores extremos de

$$f(x) = \sin x - \operatorname{sen}^2 x, \quad x \in [0, 2\pi]$$

6.– Encontrar la función cuya segunda derivada es la constante 2, y cuya gráfica presenta un mínimo en el punto $(1, 2)$.

Representación gráfica de funciones: Las derivadas son una útil herramienta para examinar las gráficas de funciones.

Crecimiento y decrecimiento: Decimos que una función f es *creciente* en un intervalo (a, b) si:

$$x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) < f(y) \quad \forall\, x, y \in (a, b).$$

Decimos que una función f es *decreciente* en un intervalo (a, b) si:

$$x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) > f(y) \quad \forall\, x, y \in (a, b).$$

Si f es una función derivable en (a, b), entonces:

- Si $f'(x) \geq 0\ \forall\, x \in (a, b)$, entonces f es creciente en (a, b).
- Si $f'(x) \leq 0\ \forall\, x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en (a, b).

Máximos y mínimos de una función: Para calcular los máximos y mínimos de una función continua f en su dominio podemos proceder del modo siguiente:

1. Hallar todos los puntos críticos. Son los puntos extremos del dominio (si los hay) y los puntos interiores c en los cuales $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.
2. Examinar los puntos extremos del dominio comprobando el signo de la derivada primera en su proximidad.
3. Examinar cada punto crítico interior c comprobando el signo de la derivada primera a ambos lados de c (criterio de la derivada primera) o el signo de la derivada segunda en c (criterio de la derivada segunda).

Concavidad y convexidad: Si una función f es derivable hasta de orden 2 en un intervalo (a, b) y se cumple que si $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, diremos que f es cóncava hacia arriba en (a, b). Si se cumple que $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ diremos que f es cóncava hacia abajo en (a, b).

Puntos de inflexión: El punto $(x_0, f(x_0))$ de la gráfica de una función f en el cual la concavidad "cambia" se conoce con el nombre de *punto de inflexión* de la curva.

Hay ocasiones en las que existe cambio de concavidad de la curva sin existir punto de inflexión, en este caso, simplemente se dice que "hay inflexión" sin existir punto de inflexión.

7.– Sea la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

Calcular el dominio de la función, sus asíntotas –si es que existen–, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos. Con esta información esbozar la gráfica de la función f.

Solución

- Dominio: $x \in \text{Dom}(f) \iff x^2 - 1 \neq 0) \iff x \neq \pm 1. \qquad \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}.$
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos:
  1. Calculamos la primera derivada de la función f:

  $$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

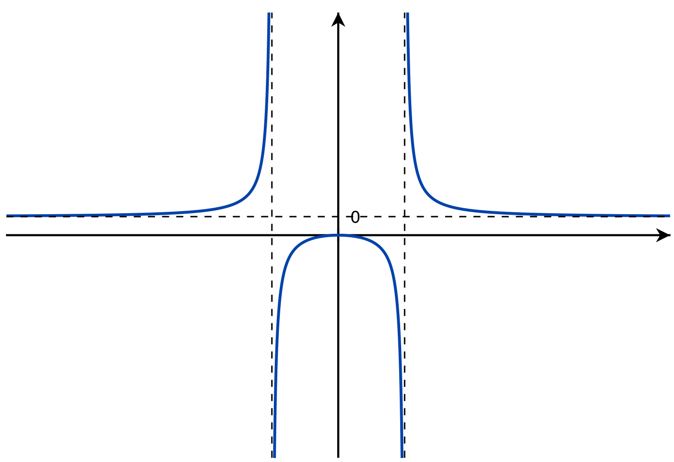
  2. Calculamos los puntos en los que se anula la primera derivada o no existe la primera derivada:

     - $f'(x) = 0 \implies -\frac{2x}{(x^2-1)^2} = 0 \implies x = 0$
     - Para $x = \pm 1$ no existe la derivada de $f(x)$.

  3. Formamos un cuadro de variación de los signos de la primera derivada sobre su dominio teniendo en cuenta que donde puede haber cambio de signo de la primera derivada es en los puntos calculados en el paso anterior.

x		-1		0		1	
$f'(x)$	$+$	$\nexists$	$+$	0	-	$\nexists$	-
$f(x)$	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$	máximo local	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$

- Asíntotas: $x = \pm 1$ son asíntotas verticales. $y = 1$ es asíntota horizontal.



Cálculo de máximos y mínimos: Para optimizar una función matemática que describe un problema real se aplican normalmente las siguientes reglas prácticas operativas:

- Si el problema es de tipo geométrico, es conveniente hacer un dibujo indicando las variables que intervienen en el problema.
- Determinar la expresión algebraica de la función que se quiere maximizar o minimizar según los datos disponibles del problema.
- Simplificar esta expresión para reducirla a una función de una sola variable.
- Estudiar la posición de los máximos, los mínimos y otros puntos críticos.
- Interpretar los resultados dentro del contexto definido por el problema.

- Para funciones definidas en un intervalo abierto o en una unión de intervalos abiertos, los *puntos críticos* son aquellos en los cuales la derivada se anula o no existe. Para las funciones definidas sobre un intervalo cerrado o semicerrado o en una unión de tales intervalos, los *extremos* del dominio se llaman también *puntos críticos*.

- ¿Cómo hallar todos los valores extremos (locales, en un extremo y absolutos) de una función continua f?

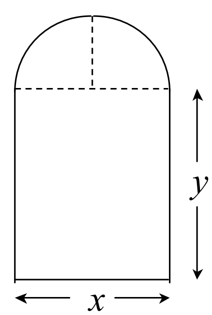
  1. Hallar todos los puntos críticos. Son los puntos extremos del dominio (si los hay) y los puntos interiores c en los cuales $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.
  2. Examinar los puntos extremos del dominio comprobando el signo de la derivada primera en su proximidad.
  3. Examinar cada punto crítico interior c comprobando el signo de la derivada primera a ambos lados de c (criterio de la derivada primera) o el signo de la derivada segunda en c (criterio de la derivada segunda).

- Las técnicas para calcular los extremos de una función pueden utilizarse para resolver una gran variedad de problemas sobre máximos y mínimos. El *paso clave* en la resolución de estos problemas consiste en expresar la cantidad que se quiere maximizar o minimizar como una función de una variable. Si dicha función es diferenciable, podemos diferenciarla y analizar los resultados.

8.– Una ventana de forma rectangular, rematada por un arco de medio punto, tiene un perímetro de 12 metros. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que sea su superficie lo mayor posible?

<u>Solución</u>

- Esbozamos un dibujo del problema.



- Determinar la expresión algebraica de la función que se quiere maximizar o minimizar según los datos disponibles del problema.
$$A(x,y) = xy + \frac{\pi \cdot (x/2)^2}{2} = xy + \frac{\pi \cdot x^2}{8}$$

- Simplificar esta expresión para reducirla a una función de una sola variable.

  Teniendo en cuenta que:
$$12 = x + 2y + \pi \cdot \frac{x}{2},$$
  tenemos que:
$$y = 6 - \frac{x}{2} - \frac{\pi \cdot x}{4}$$
  Por lo tanto:
$$A(x) = 6x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi \cdot x^2}{8}$$

- Estudiar la posición de los máximos, los mínimos y otros puntos críticos.

$$A'(x) = 6 - x - \frac{\pi \cdot x}{4}; \qquad A'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{24}{4+\pi}$$

- Interpretar los resultados dentro del contexto definido por el problema.

$$x = \frac{24}{4+\pi} \quad ; \quad y = \frac{12}{4+\pi}$$

9.– La base y la altura de un triángulo isósceles miden, respectivamente, 6 unidades y 12 unidades. Hallar el área máxima posible de un rectángulo que pueda situarse dentro del triángulo con uno de sus lados sobre la base del triángulo. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo o de los rectángulos de máxima área?

10.– Se planea construir una nueva carretera entre los pueblos A y B. El pueblo A está sobre una carretera abandonada que va de este a oeste. El pueblo B está en un punto situado 3 km hacia el norte de otro punto que está sobre la carretera antigua y a 5 km hacia el este del pueblo A. Los ingenieros proponen conectar los pueblos reconstruyendo una parte de la antigua carretera desde A hasta un punto P y construyendo carretera nueva desde P hasta B. Si el coste de reconstruir carretera antigua es de 200000 euros por km y el de construir nueva es de 400000 euros por km, ¿qué longitud de carretera antigua se deberá reconstruir a fin de minimizar los costes?

11.– La mancha de impresión de una página ha de ser de 81 centímetros cuadrados. Los márgenes superior e inferior son de 3 centímetros cada uno, mientras que los laterales son de 2 centímetros cada uno. Hallar las dimensiones más económicas dado que el precio de una página es directamente proporcional al perímetro de la misma.

12.– El beneficio obtenido por la producción y venta de x kilos de un artículo viene dado por la función:

$$B(x) = -0.01x^2 + 3.6x - 180$$

a.– Determinar los kilos que hay que producir para que el beneficio sea máximo.

b.– Determinar los kilos que hay que producir y vender como máximo para que la empresa no tenga pérdidas.

13.– Enunciar el teorema de Rolle. Dado el intervalo $I = [0, 5]$ y dada la función $f(x) = x^2 - AX$, encontrar el valor de A para que se pueda aplicar el teorema de Rolle al intervalo I, a aplicar el teorema en ese caso.

14.– Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = x^4 e^{-x}$$

Como consecuencia calcular los máximos y mínimos locales de f y representar su gráfica.

15.– Una hoja de papel debe contener 648 cm^2 de texto impreso, siendo los márgenes superior e inferior de 2 cm (cada uno) y los laterales de 1cm. Hallar las dimensiones que debe tener la hoja para que su superficie sea la mínima posible.

16.– Sea $f(x) = x + xe^{-x}$. Calcular la ecuación de la recta tangente a f en el punto x para el cual dicha recta tangente sea paralela a la recta que pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(3, 3)$.

17.– Hallar el dominio de definición, los máximos y mínimos y los puntos de inflexión de la función

$$f(x) = x + \sqrt{1-x}$$

18.– Hallar el dominio de definición, los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x}$$

19.– Sea h una función derivable en todos los puntos, de la que se conocen los siguientes valores: $h(2) = 3$ y $h'(2) = -1$. se considera la función $f(x)$ definida por

$$f(x) = \sqrt{\big[h(x)\big]^2 + x^2 + 3}$$

Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $x = 2$.

20.– Sea h la función definida por

$$h(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$$

Encontrar las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de h. Dibujar un esquema de la gráfica de h.

21.– Hallar los máximos y mínimos relativos, los puntos de inflexión y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$y = xe^{-x}$$

22.– Un trozo de alambre de longitud 20 se divide en dos trozos. Con el primero se forma un rectángulo cuya base es el doble de su altura y con el segundo trozo se forma un cuadrado. Encontrar las longitudes de dichos trozos para que sea mínima la suma del área del rectángulo y la del cuadrado.

23.– Encontrar el dominio de la función $y = \ln(1 + x + x^2)$ y los puntos en los que la tangente a la curva es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

24.– Resolver la desigualdad

$$\frac{x+2}{1-x} < 1, \qquad (x \neq 1)$$

25.– Formar la composición $f \circ g$ y dar el dominio,

a.– $f(x) = 2x + 5, \quad g(x) = x^2$

b.– $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2 + 5$

c.– $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2$