Secciones cónicas: Consideremos ecuaciones de la forma

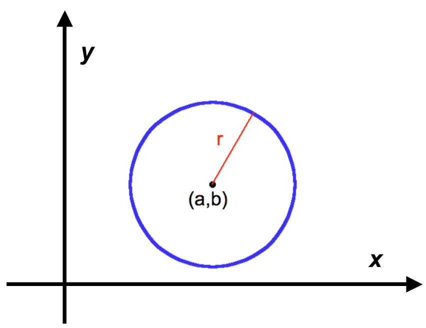
$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0,$$

donde A, B, C, D y E son constantes y A y B no son ambas 0. La gráfica de una ecuación de este tipo es, en general, una sección cónica (con los ejes paralelos a los ejes coordenados); es decir: una circunferencia, una elipse, una parábola o una hipérbola. Decimos "en general" porque hay casos especiales. Por ejemplo, la gráfica de $x^2 + y^2 = 0$ es un punto, $(0, 0)$, o podría no existir ninguna gráfica: no hay pares ordenados (x, y) que satisfagan la ecuación $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

Circunferencia: Se llama *circunferencia* al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.

$$\begin{array}{lll} A = B; & Ax^2 + Ay^2 + Cx + Dy + E = 0 & \text{o bien} \\ & x^2 + y^2 + Cx + Dy + E = 0 & \text{(después de dividir por } A\text{)} \end{array}$$

► Forma estándar:



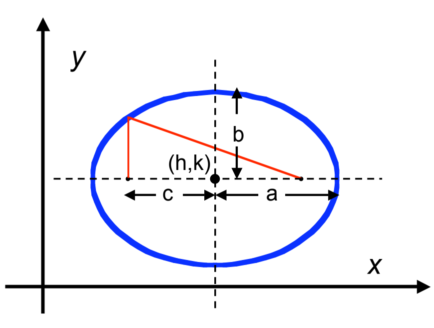
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

circunferencia de radio r, centrada en $P(a, b)$

Elipse: La *elipse* es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es constante

$$A,\ B \text{ tienen el mismo signo } A \neq B; \quad Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

► Forma estándar:



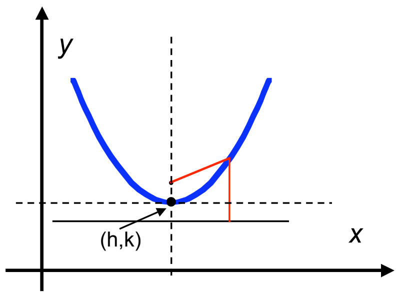
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

elipse centrada en $P(h, k)$ $\quad (a^2 = b^2 + c^2)$

Parábola: La *parábola* es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz.

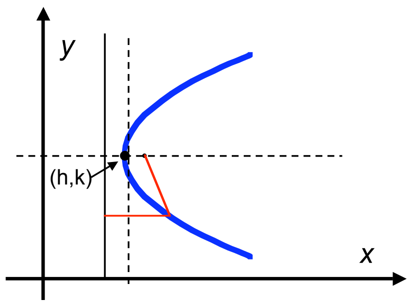
$$\begin{array}{lll} A = 0 \text{ o } B = 0; & By^2 + Cx + Dy + E = 0, \quad B \neq 0 & \text{o bien} \\ & Ax^2 + Cx + Dy + E = 0, \quad A \neq 0 & \end{array}$$

► Formas estándares:



$$(x-h)^2 = 4c(y-k)$$

parábola con vértice en $P(h,k)$ y eje vertical



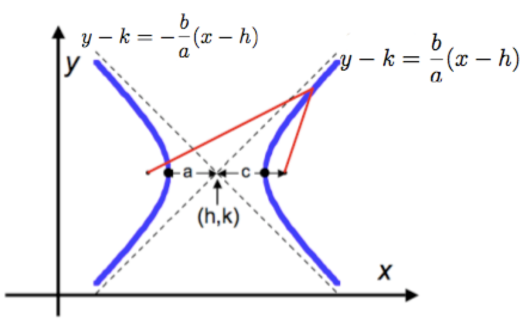
$$(y-k)^2 = 4c(x-h)$$

parábola con vértice en $P(h,k)$ y eje horizontal

Hipérbola: Una *hipérbola* es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias entre dos puntos fijos es constante

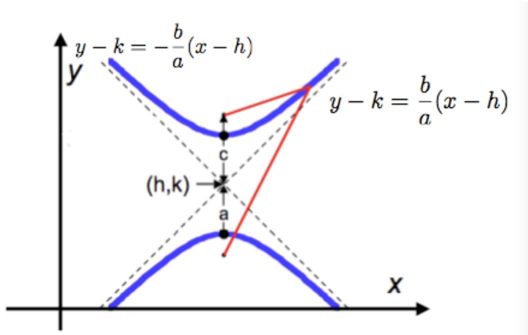
$$A,\ B \text{ tienen signos opuestos;} \quad Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

► Formas estándares:



$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

hipérbola con centro en $P(h,k)$ y eje horizontal



$$\frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 - \frac{(x-h)^2}{a^2}$$

hipérbola con vértice en $P(h,k)$ y eje vertical

Por lo tanto, hay que identificar la cónica correspondiente a los puntos que satisfacen una ecuación de la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

hasta obtener alguna de las formas canónicas mencionadas. Para ello basta con utilizar la técnica de "completar cuadrados" y hacer algunas otras operaciones algebraicas para transformarla en una de las formas canónicas.

Recordar que:

- Circunferencia: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, con $A = B$ no nulos.
- Elipse: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, con A y B del mismo signo pero $A \neq B$.
- Parábola: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, con A o B nulos, pero no nulos simultáneamente.
- Hipérbola: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, con A y B no nulos y de signos distintos.

Completar cuadrados es una técnica que permite escribir una expresión de la forma $x + ax$ en la forma

$$(x + b)^2 + c.$$

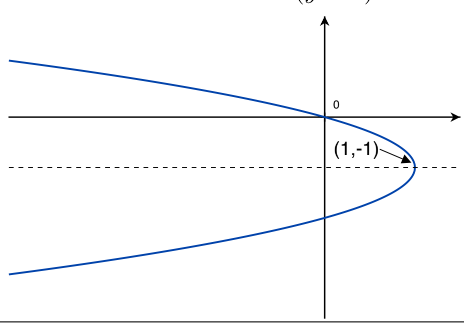
1.– Identificar cada una de las siguientes ecuaciones con una sección cónica y representarla gráficamente:

$$\begin{array}{l}
y^2 + 2y + x = 0 \\
x^2 + y^2 - 4x + 6y = 3 \\
2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y + 5 = 0 \\
2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y = -10 \\
y^2 - 4y - 4x^2 + 8x = 4 \\
4x^2 + 16x - 16y = 32 \\
4x^2 - y^2 - 24x - 4y + 16 = 0 \\
4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0
\end{array}$$

Solución $y^2 + 2y + x = 0$ es una parábola. Completamos cuadrados para escribir esta parábola en su forma canónica.

$$y^2 + 2y + x = (y + 1)^2 - 1 + x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x - 1 = -(y + 1)^2$$

$y^2 + 2y + x = 0$



2.– Resolver en x las siguientes desigualdades:

a.– $(x - 2)^2(10 - 2x) > 0$

b.– $x(2x - 1)(3x - 5) \geq 0$

c.– $\dfrac{2x - 6}{x^2(6x + 5)} < 0$

d.– $\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{4}{x - 6} > 0$

e.– $\dfrac{x^2 - 4x}{(x + 2)^2} < 0$

3.– Ordenar los siguientes términos: 1, x, $\sqrt{x}$, $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ cuando $1 < x$. Idem para $0 < x < 1$.