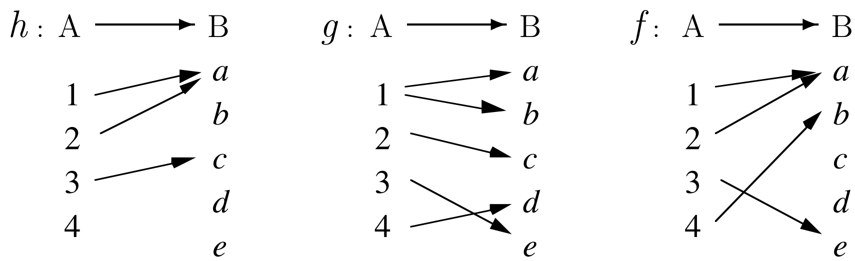
Aplicación: Una correspondencia f entre dos conjuntos A y B recibe el nombre de *aplicación*, si a todo elemento del conjunto A le corresponde un solo elemento del conjunto B.

1.– Razonar cuáles de las siguientes correspondencias entre los conjuntos

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{y} \quad B = \{a, b, c, d, e\}$$

son aplicaciones y cuáles no:



Para las correspondencias que sean aplicaciones justificar cuál o cuáles son inyectivas, suprayectivas y/o biyectivas.

<u>*Solución*</u> Una correspondencia f entre dos conjuntos A y B recibe el nombre de *aplicación*, si a todo elemento del conjunto A le corresponde un solo elemento del conjunto B.

Es decir, de cada uno de los elemento del conjunto A ha de salir una única flecha hacia B para que alguna de estas correspondencias sea aplicación.

Por lo tanto:

- h no es aplicación pues al elemento 4 de A no le corresponde ningún elemento de B.
- g no es aplicación pues al elemento 1 de A le corresponden dos elementos de B.
- f sí es aplicación pues a cada elemento del conjunto A le corresponde un solo elemento del conjunto B.

Vamos a estudiar si la aplicación f es inyectiva, suprayectiva y/o biyectiva.

- Para que f sea inyectiva a cada elemento de B ha de llegar como mucho una flecha,; es decir los elementos de B tienen como mucho una antimagen. Por tanto f no es inyectiva pues el elemento a de B tiene dos antimagenes. Es decir:

$$f(1) = f(2) \quad \text{pero} \quad 1 \neq 2$$

- Para que f sea suprayectiva a cada elemento de A ha de llegar al menos una flecha; es decir, todos los elementos de B deben de tener al menos una antimagen. Por tanto f no es suprayectiva pues el elemento c de B no tiene antimagen. es decir:

$$\nexists x \in A \, / \, f(x) = c$$

- Para que f sea biyectiva a todos y cada uno de los elementos de B ha de llegar exactamente una flecha. O lo que es lo mismo, una aplicación es biyectiva si y sólo si es inyectiva y suprayectiva. Por lo tanto f no es biyectiva.

Composición de aplicaciones: Sean f una aplicación de A en B y g una aplicación de B en C. Construimos una tercera aplicación, $h = g \circ f$, de A en C del modo siguiente:

$$h(x) = g\left(f(x)\right), \quad \forall x \in A$$

Esta construcción se suele representar esquemáticamente del modo siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ x & \longrightarrow & f(x) & \longrightarrow & g\left(f(x)\right) = h(x) \end{array}$$

$$h = g \circ f$$

2.– Consideremos las aplicaciones:

$$f(x) = 3x^2 + 4 \quad \text{y} \quad g(x) = 2x - 5$$

Construir las aplicaciones $(g \circ f)(x)$ y $(f \circ g)(x)$

<u>*Solución*</u>

Como para todo elemento x del dominio de la aplicación f que es $\mathbb{R}$ se cumple que $f(x) \in \operatorname{Dom}(g) = \mathbb{R}$, tenemos que $\operatorname{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$. Además:

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = g(3x^2 + 4) = 2(3x^2 + 4) - 5 = 6x^2 + 3$$

Inversa de una aplicación inyectiva: Si $f : A \longrightarrow B$ es una aplicación biyectiva, existe una aplicación que denotaremos f^{-1} definida del modo siguiente:

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & B & \longrightarrow & A \\ & y & \longrightarrow & x \,/\, f(x) = y \end{array}$$

que cumple:

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y \quad \forall y \in B \quad ; \quad \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = y \quad \forall x \in A,$$

es decir:

$$f \circ f^{-1} = I_B \quad \text{y} \quad f^{-1} \circ f = I_A$$

Esta aplicación, que es única y existe si y sólo si la aplicación f es biyectiva, se denomina la *aplicación inversa* de f.

Si f es una aplicación inyectiva en A y denotamos por B el conjunto imagen de f, es decir, $B = \operatorname{Im} f$, como para cada elemento $y \in B$ existe un único elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$, podemos definir la aplicación inversa de f de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & B & \longrightarrow & A \\ & y & \longrightarrow & x \,/\, f(x) = y \end{array}$$

3.– Calcular la aplicación inversa de $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ definida por:

$$f(x) = \frac{1}{3x - 1} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

<u>*Solución*</u> Para calcular la inversa de una aplicación inyectiva procedemos del modo siguiente.

Si $y \in \operatorname{Im} f$ entonces existe un único $x \in \operatorname{Dom} f$ tal que $y = f(x)$ o, lo que es lo mismo, con $x = f^{-1}(y)$. Por lo tanto, podemos encontrar $f^{-1}(y)$ en dos pasos:

- Primero despejando x de la ecuación $f(x) = y$, para obtener $x = f^{-1}(y)$.
- Luego obtenemos $y = f^{-1}(x)$ con sólo cambiar y por x.

Aplicamos este método al ejercicio propuesto:

$$f(x) = \frac{1}{3x-1} = y$$

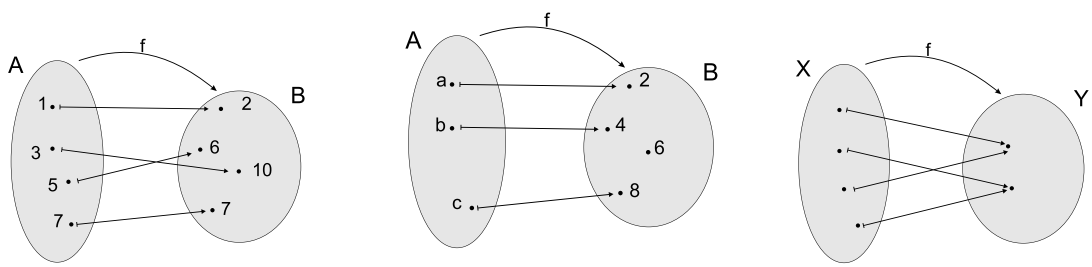
Por lo tanto,

$$3x - 1 = \frac{1}{y} \quad \Longrightarrow \quad 3x = \frac{1+y}{y}.$$

De aquí que:

$$x = \frac{1+y}{3y}, \quad \text{es decir: } f^{-1}(x) = \frac{1+x}{3x}$$

4.– Para cada una de las aplicaciones cuyas gráficas aparecen en las figuras adjuntas, hallar su dominio e imagen. Justificar si son inyectivas, suprayectivas o biyectivas.



5.– Sean las funciones reales de variable real siguientes:

$$f(x) = 1 - x \qquad g(x) = \frac{1}{x} \qquad h(x) = \frac{x}{1-x}$$

Hallar los campos de existencia o dominios de las funciones $h \circ (f \circ g)$, $g \circ (f \circ h)$ así como sus fórmulas.

6.– Construir las inversas, si es posible, de las siguientes funciones reales de variable real:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 \qquad g(x) = \frac{2x+2}{x-3} \qquad h(x) = \frac{x}{1-x}$$

Dominio de una función: el dominio de una función es el conjunto de los valores para los cuales la función está definida.

Recorrido de una función: el recorrido de una función, también denominado conjunto imagen o rango de la función, es el conjunto de los valores que puede tomar la función.

7.– Para cada una de las siguientes funciones reales de variable real, hallar el dominio, el conjunto imagen y justificar si son inyectivas, suprayectivas o biyectivas.

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = \frac{x}{x-1} \qquad h(x) = \sqrt{2}$$

Solución

- Como la función f está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, es decir, podemos calcular x^2 para cualquier número real, el dominio de f es todo $\mathbb{R}$ y podemos escribir:

$$\mathrm{Dom}_f = \mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$$

- Como los valores que toma la función f son no negativos pues $x^2 \geq 0$, su recorrido es el intervalo $[0, \infty)$. Escribimos:

$$\mathrm{Im}_f = \mathrm{Im}\,(f) = [0, \infty)$$

- Como la función g está definida para todo $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, es decir, podemos calcular $\dfrac{x}{x-1}$ para cualquier número real distinto de 1, el dominio de g es $\mathbb{R} - \{1\}$ y escribimos:

$$\mathrm{Dom}_g = \mathrm{Dom}\,(g) = \mathbb{R} - \{1\}$$

- Calcular el recorrido de g es un poco más delicado. Observamos que el numerador siempre es mayor que el denominador, es decir:

$$x > x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

  Recordemos que al multiplicar o dividir una desigualdad (o cadena de desigualdades) por un número positivo la desigualdad mantiene el sentido. Sin embargo, si multiplicamos o dividimos la desigualdad (o cadena de desigualdades) por un número negativo la desigualdad cambia el sentido. Es decir:

$$x > x - 1 \wedge x - 1 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{x-1} > 1$$

$$x > x - 1 \wedge x - 1 < 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{x-1} < 1$$

  Por lo tanto:

$$\mathrm{Im}_g = \mathrm{Im}\,(g) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$$

Al representar gráficamente una función se ven reflejados su dominio, su recorrido y muchas otras cuestiones de interés.

¿Cómo estudiar si una aplicación es inyectiva?

Si pensamos que la aplicación puede ser inyectiva el razonamiento a seguir es el siguiente:

partimos de $f(x) = f(t)$ e intentamos llegar a la identidad $x = t$

Si, por el contrario, creemos que no es inyectiva, tendremos que buscar como en el ejemplo anterior dos elementos $x \neq t$ de A tales que $f(x) = f(t)$.

8.– Comprobar que la función:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \\ & x & \longrightarrow & f(x) = \dfrac{x-3}{1+2x} \end{array}$$

es una aplicación biyectiva y calcular su inversa.

<u>*Solución*</u> Para demostrar que f es inyectiva partimos de $f(x) = f(y)$ y demostraremos que necesariamente se ha de cumplir $x = y$.

$$f(x) = f(y) \quad \Longrightarrow \quad \frac{x-3}{1+2x} = \frac{y-3}{1+2y} \quad \Longrightarrow \quad (x-3)(1+2y) = (y-3)(1+2x) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad x + 2xy - 3 - 6y = y + 2xy - 3 - 6x \quad \Longrightarrow \quad x - 6y = y - 6x \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 7x = 7y \quad \Longrightarrow \quad x = y$$