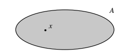
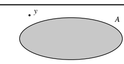
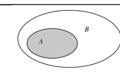
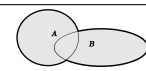
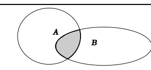
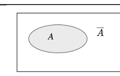
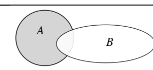
Los diagramas de Venn son de gran utilidad para entender la teoría de conjuntos. Un diagrama de Venn no sirve como demostración pero es de gran ayuda.

A modo de resumen incluimos el siguiente cuadro:

Símbolo	Significado	Diagrama de Venn
$\in$	pertenece a ($\overbrace{x}^{\text{elemento}} \in \overbrace{A}^{\text{conjunto}}$)	
$\notin$	no pertenece a ($\overbrace{y}^{\text{elemento}} \notin \overbrace{A}^{\text{conjunto}}$)	
$\subset$	contenido en ($\overbrace{A}^{\text{conjunto}} \subset \overbrace{B}^{\text{conjunto}}$)	
$\cup$	unión ($\overbrace{A}^{\text{conjunto}} \cup \overbrace{B}^{\text{conjunto}}$)	
$\cap$	intersección ($\overbrace{A}^{\text{conjunto}} \cap \overbrace{B}^{\text{conjunto}}$)	
$\overline{A}$	complementario ($\overbrace{\overline{A}}^{\text{conjunto}}$)	
$A-B$	diferencia ($\overbrace{A}^{\text{conjunto}} - \overbrace{B}^{\text{conjunto}}$)	

1.– Sean X un conjunto y A, B dos subconjuntos no disjuntos de X. Demostrar que los subconjuntos $A\cap B$ y $A-B$ son disjuntos y tales que:

$$A=(A\cap B)\cup(A-B)$$

<u>*Solución*</u>

Tenemos que demostrar:

- $A\cap B$ y $A-B$ disjuntos, es decir $(A\cap B)\cap(A-B)=\emptyset$
- $(A\cap B)\cup(A-B)=A$

Recordar que un diagrama de Venn puede ser de mucha utilidad, sin embargo no sirve como demostración.

$$\begin{aligned}(A\cap B)\cap(A-B) &= (A\cap B)\cap\left(A\cap\overline{B}\right) \overset{\substack{\text{P. asociativa}\\ \downarrow}}{=} A\cap B\cap A\cap\overline{B} \overset{\substack{\text{P. asociativa}\\ \text{P. conmutativa}\\ \downarrow}}{=} \\ &= (A\cap A)\cap\left(B\cap\overline{B}\right) \overset{\substack{\text{P. idempotente}\\ \downarrow}}{=} A\cap\emptyset=\emptyset\end{aligned}$$

$$(A\cap B)\cup(A-B) = (A\cap B)\cup\left(A\cap\overline{B}\right) \overset{\substack{\text{P. distributiva}\\ \downarrow}}{=} A\cap\left(B\cup\overline{B}\right)=A\cap X=A$$

2.– Sean X un conjunto y A, B dos subconjuntos de X. Demostrar que:

$$\text{si } A\cap(X-B)=\emptyset, \text{ entonces } A\subset B$$

<u>*Solución*</u>

Repetimos el comentario anterior. Un diagrama de Venn puede ser de mucha utilidad, sin embargo no sirve como demostración.

En este caso un diagrama de Venn nos sirve para entender que el ejercicio es cierto.

Para demostrar que $A \subset B$ podemos demostrar que:

$$x \in A \quad \Longrightarrow \quad x \in B.$$

$$x \in A \quad \overset{A\cap((X-B)=\emptyset}{\overset{\downarrow}{\Longrightarrow}} \quad x \notin X - B = X \cap \overline{B} = \overline{B} \quad \Longrightarrow \quad x \in B.$$

Luego hemos demostrado $A \subset B$.

3.– Demostrar que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

<u>*Solución*</u>

La identidad que tenemos que demostrar es una de las dos leyes de Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad , \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

En ocasiones, cuando queremos demostrar igualdad entre dos conjuntos puede resultar conveniente proceder del modo siguiente:

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \bullet & A \subset B \\ \bullet & B \subset A \end{cases}$$

En este caso, y en otros muchos, podemos resolver el ejercicio en un único paso pues podemos decir que el camino es de ida y de vuelta.

$$x \in \overline{A \cup B} \quad \Longleftrightarrow \quad x \notin A \cup B \quad \Longleftrightarrow \quad x \notin A \wedge x \notin B \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \overline{A} \cap \overline{B}$$

4.– Sean X un conjunto y A, B dos subconjuntos de X.

a.– Comprobar que $\overline{\overline{A}} = A$.

b.– Comprobar que $(X - A) - (X - B) = B - A$.

5.– Sean X un conjunto y A, B dos subconjuntos de X. Demostrar que:

a.– Si $A \subset B$, entonces $X - B \subset X - A$.

b.– Si $X - B \subset X - A$, entonces $B \cup (X - A) = X$.

c.– Si $B \cup (X - A) = X$, entonces $A \cap (X - B) = \emptyset$.

6.– Si A, B, C y D son subconjuntos de X, demostrar que:

a.– Si $A \subset C$ y $B \subset D$, entonces $A \cup B \subset C \cup D$.

b.– Si $A \subset C$ y $B \subset D$, entonces $A \cap B \subset C \cap D$.

7.– Demostrar las leyes de Morgan.