Una **tabla de verdad** es una tabla que despliega el valor de verdad de una proposición compuesta, para cada combinación de valores de verdad que se pueda asignar a sus componentes.

Las tablas de verdad son un complemento interesante y un gran instrumento para la investigación lógica. Aunque el estudio de la lógica es importante para los estudiantes de la especialidad de Informática de Gestión, no es necesario que los alumnos traten de ahondar excesivamente en la utilización de las tablas de verdad para su utilización en las matemáticas.

1.– Construir las tablas de verdad de las siguientes expresiones:

a.– no–(si A entonces B)

<u>*Solución*</u>

Procedemos del modo siguiente. Escribimos cuatro filas que responden a los casos posibles que pueden darse según el valor V o F de cada una de las proposiciones A, B. (Columnas 1 y 2).

Una columna (Columna 3) en la que se establecen los valores de A $\Longrightarrow$ B. Otra columna (Columna 43) en la que se establecen los valores de no–(A $\Longrightarrow$ B).

A	B	A $\Longrightarrow$ B	no–(A $\Longrightarrow$ B)
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

Completamos en primer lugar la tercera columna de esta tabla de verdad utilizando la información contenida en el capítulo 1 *Lenguaje y razonamiento matemático*.

A	B	A $\Longrightarrow$ B	no–(A $\Longrightarrow$ B)
V	V	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	F	V	

Resolvemos el ejercicio utilizando de nuevo la información contenida en el capítulo 1 *Lenguaje y razonamiento matemático*. Completamos la última columna.

A	B	A $\Longrightarrow$ B	no–(A $\Longrightarrow$ B)
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	F

b.– no–(A o B)

A	B	A $\vee$ B	no–(A $\vee$ B)
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

Métodos de demostración. Método de inducción simple: El método de demostración conocido como *inducción simple* (o método de inducción, sin más) se suele utilizar para demostrar que una cierta proposición $P(n)$, que se refiere a los números naturales n, es cierta para cada n. Tenemos que proceder del siguiente modo:

1.– Demuestra que $P(1)$ es cierta.

2.– Demuestra que si $P(h)$ es cierta, entonces $P(h+1)$ es cierta.

Así queda claro que $P(n)$ es cierta para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Se puede entender este proceso de demostración pensando en una fila de fichas de dominó puestas de pie de tal modo que si se cae una se cae la siguiente de la fila. Si te aseguras de este hecho y tiras la primera, está claro que se caerán todas.

En este método de demostración la fase 2.– corresponde a asegurarse de que si se cae una ficha se cae la siguiente, y la fase 1.– corresponde a cerciorarse de que la primera fila se cae.

2.– Demostrar por inducción la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

<u>*Solución*</u>

1.– Comprobamos que la fórmula es cierta para $n = 1$.

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

2.– Supuesto que la fórmula es cierta para h, demuestra que también se cumple para $h+1$ (sin excepciones).

$$\sum_{k=1}^{h+1} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{h} k^2\right) + (h+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Utilizamos la hipótesis de inducción, es decir:

$$\sum_{k=1}^{h} k^2 = \frac{h(h+1)(2h+1)}{6}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{h+1} k^2 &= \left(\sum_{k=1}^{h} k^2\right) + (h+1)^2 = \frac{h(h+1)(2h+1)}{6} + (h+1)^2 = \frac{h(h+1)(2h+1)+6(h+1)^2}{6} = \\ &= \frac{(h+1)\big(h(2h+1)+6(h+1)\big)}{6} = \frac{(h+1)\big(2h^2+7h+1\big)}{6} = \frac{(h+1)(h+2)(2h+3)}{6},\end{aligned}$$

que era lo que queríamos demostrar.

3.– Construir las tablas de verdad de las siguientes expresiones:

a.– no–(A y B)

b.– no–A o no–B

c.– no–A y no–B

d.– no–(A y no–B)

4.– Comprobar, construyendo las tablas de verdad, que las siguientes expresiones son leyes lógicas (es decir, solamente toman valores verdaderos para cualesquiera valores de las expresiones elementales que la constituyen.)

a.– (A $\Longrightarrow$ B) $\Longleftrightarrow$ (no–B $\Longrightarrow$ no–A)

b.– no–(A o B) $\Longleftrightarrow$ no–A y no–B

5.– Demostrar por inducción las siguientes igualdades:

a.– $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$

b.– $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

c.– $\sum_{k=1}^{n}k^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

d.– $\sum_{k=1}^{n}k\cdot(k!)=(n+1)!-1$

e.– $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=1-\dfrac{1}{n+1}$

Métodos de demostración. Demostración directa: En el texto[1] recomendado en la bibliografía puede leerse el siguiente párrafo que encaje muy bien con el método que hay que utilizar para resolver el siguiente ejercicio:

> Este tipo de demostración se suele llamar *demostración directa*, y se parece a la forma en que se procede ante un diagrama de laberintos, en el que dentro de una malla enrevesada figura un tesoro. El objetivo es ir, desde fuera, hasta el tesoro. Una de las formas de actuar es ir recorriendo, empezando desde fuera, y siempre con los ojos puestos en el tesoro, los pasadizos que, esperamos, nos conduzcan a él.

6.– Utilizar alguna de las fórmulas del ejercicio anterior para demostrar que el cubo de cualquier número entero es la diferencia de los cuadrados de dos números enteros.

Solución

Observamos que la información que hay que utilizar del ejercicio anterior es la correspondiente al apartado c. Es decir:

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Escribimos:

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\sum_{k=1}^{n-1}k^3\right)+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Aplicamos de nuevo la fórmula del apartado c para la suma de los cubos de los $n-1$ primeros números naturales, que es:

$$\sum_{k=1}^{n-1}k^3=\frac{(n-1)^2n^2}{4}$$

[1] M. de Guzmán (2003): *Cómo hablar, demostrar y resolver en matemáticas*, Colección Base Universitaria. Madrid: Grupo Anaya.

Por lo tanto:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n-1} k^3\right) + n^3 = \frac{(n-1)^2 n^2}{4} + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Despejando n^3 obtenemos:

$$n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{(n-1)^2 n^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{2^2} - \frac{(n-1)^2 n^2}{2^2}$$

Teniendo en cuenta que el producto de dos números naturales consecutivos, como por ejemplo $n(n+1)$ y $(n-1)n$ es un número par, se tiene que los números:

$$\frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{y} \qquad \frac{(n-1)n}{2}$$

son enteros, con lo cual hemos demostrado el ejercicio.

7.– Calcular la solución de la ecuación

$$(x^2 + x + 1) + (x^2 + 2x + 3) + (x^2 + 3x + 5) + \cdots + (x^2 + 20x + 39) = 4500$$

Indicación: usar las fórmulas del ejercicio **5.–**.

8.– ¿Cuántos subconjuntos tiene un conjunto de n elementos?

9.– Mi hermano me lleva ocho años. Si hace tres años su edad era el triple que la mía, ¿dentro de cuántos años su edad será el doble que la mía?

Métodos de demostración. Demostración por reducción al absurdo: El siguiente ejercicio es un ejemplo clásico de demostración por reducción al absurdo.

El método de demostración por reducción al absurdo procede de la siguiente manera:

Demostrar que A implica B es equivalente a demostrar que A y no–B implican cualquier proposición falsa, cualquier absurdo.

10.– Demostrar por reducción al absurdo que no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2. (Lo que estamos demostrando es que $\sqrt{2}$ es un número irracional).

<u>*Solución*</u>

Supongamos, por reducción al absurdo que $\sqrt{2}$ es un número racional. Escribimos:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \qquad \text{con } a \text{ y } b \text{ primos entre sí}$$

Elevamos al cuadrado:

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \qquad \text{con } a \text{ y } b \text{ primos entre sí}$$

De aquí obtenemos:

$$2b^2 = a^2 \qquad \text{con } a \text{ y } b \text{ primos entre sí}$$

Por lo tanto sabemos que a^2 es un número par. Luego también a es un número par, es decir: $a = 2c$. Sustituimos en la fórmula anterior y tenemos que:

$$2b^2 = a^2 = (2c)^2 = 4c^2 \qquad \text{con } a \text{ y } b \text{ primos entre sí}$$

Siplificando:

$$b^2 = \frac{a^2}{2} = 2c^2 \qquad \text{con } a \text{ y } b \text{ primos entre sí}$$

Concluimos que b es un número par al igual que a. ABSURDO pues a y b eran primos entre sí. Con lo cual la hipótesis de partida ($\sqrt{2}$ es un número racional) es falsa. Es decir: $\sqrt{2}$ es un número irracional.