INTEGRAL DE RIEMANN

PRIMITIVAS E INTEGRAL INDEFINIDA

Sean dos funciones f y g de variable real definidas en un dominio $D \subseteq \mathbb{R}$

Definición

g es **una primitiva** de f si $f(x)=g'(x) \quad \forall x \in D$

Si g es una primitiva de f también lo es cualquier función h definida como $h(x)=g(x)+C \quad \forall x \in D$
con C una constante arbitraria.

Definición

Se denomina **integral indefinida** de la función f, al conjunto de todas las primitivas de f, denotándose

$$\int f(x)dx=g(x)+C$$

donde la función g es una primitiva de f y C una constante arbitraria.

PARA OBTENER UNA PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN

- ✡ Buscar una primitiva en la tabla de integrales inmediatas
- ✡ Aplicar métodos elementales de integración
  - Descomposición algebraica
  - Integral por partes
  - Cambio de variable
- ✡ Funciones racionales:descomposición en fracciones simples
- ✡ Funciones trigonométricas:

Cambio general: $tg\frac{x}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ senx = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$

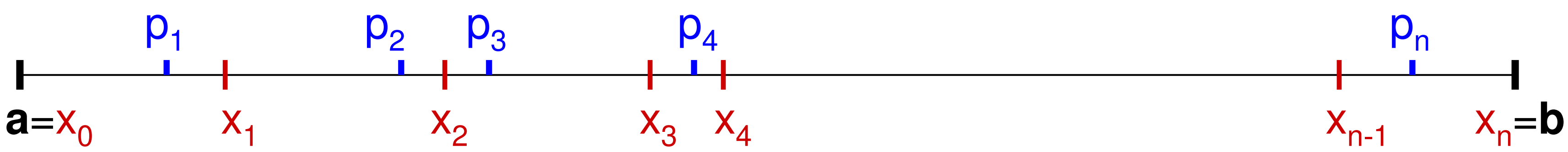
INTEGRAL DE RIEMANN

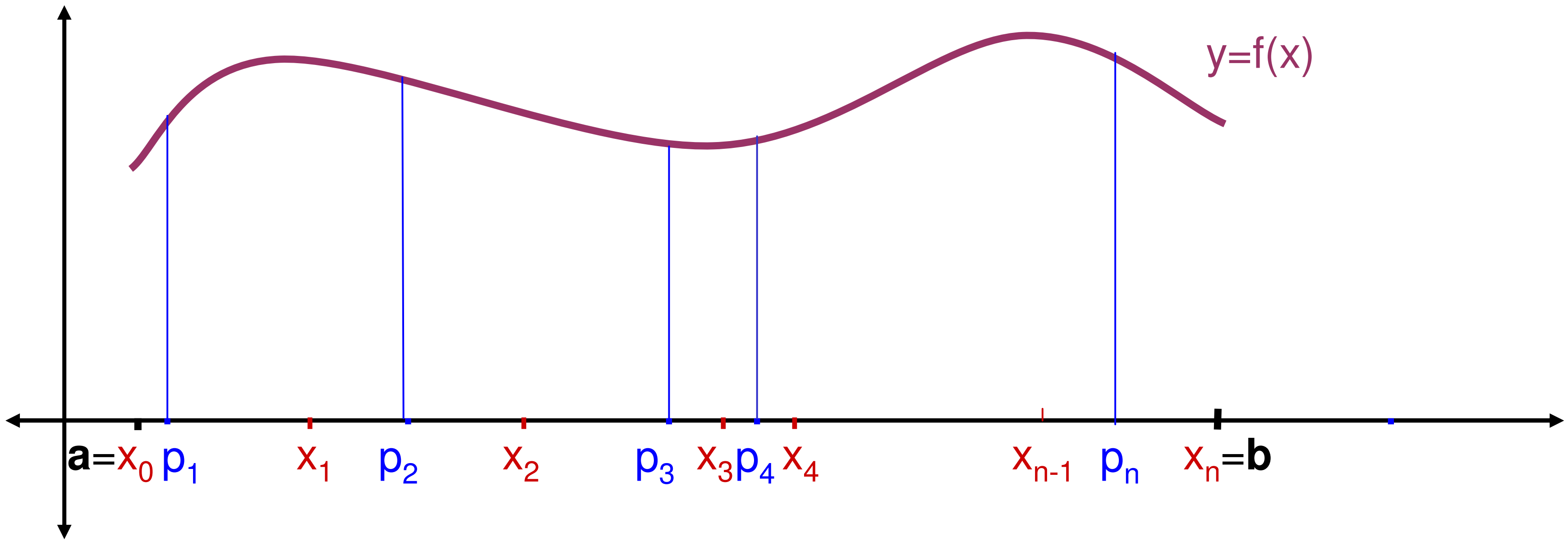
Sea f una función real de variable real definida y acotada en un intervalo cerrado [a,b]

Dividimos el intervalo [a,b] en n subintervalos consecutivos $[x_{k-1},x_k]$, es decir, $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ y elegimos un punto p_k en cada uno de ellos $p_k \in [x_{k-1},x_k]$ para $k=1,2,\ldots,n$.

Construimos la suma $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(p_k)\Delta x_k$

en donde $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ es la longitud de cada subintervalo y denotamos $m = \text{máx}\,\{\Delta x_k \,/\, k=1,2,\ldots,n\}$.





Definición

Se denomina **integral de Riemann** de f en [a,b] al límite

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(p_k)\Delta x_k$$

en caso de que exista y sea independiente de la subdivisión elegida

Cuando existe la integral de Riemann de una función en un intervalo, se dice que esa función es **integrable - Riemann** en ese intervalo

Proposición

Una función real f de variable real acotada sobre [a,b], es integrable en el sentido Riemann en [a,b] si y sólo si el conjunto de puntos de discontinuidad de f en [a,b] es un conjunto de medida nula.

Toda función continua o continua a trozos en [a,b] es integrable Riemann en [a,b].

Un conjunto se dice **de medida nula**, si la suma de las longitudes de los intervalos que contengan a todos los puntos del conjunto, se puede hacer tan pequeña como queramos. Todo conjunto finito o numerable es un conjunto de medida nula.

Proposición Regla de Barrow

Si f es continua en [a,b] y g es una primitiva de f, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DE RIEMANN

Proposición

Representamos por **I** al conjunto de las funciones integrables Riemann en [a,b]

1ª) $$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

2ª) $$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

3ª) Si $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$ $$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

4ª) Si f es integrable en [a,b] y $[c,d] \subset [a,b]$, entonces f es integrable en [c,d]

5ª) Si $c \in [a,b]$ $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

6ª) Si $f(x)=g(x)$ $\forall x \in [a,b]$ salvo en un número finito de puntos, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

7ª) Si $q_1 \leq f(x) \leq q_2$ $\forall x \in [a,b]$

$$q_1(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq q_2(b-a)$$

8º) $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

9º) $$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \leq \left[\int_a^b [f(x)]^2 dx\right].\left[\int_a^b [g(x)]^2 dx\right]$$

10ª) **Valor medio integral:**

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Valor medio cuadrático integral:

$$\mu_c = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

Se verifica que $\mu \leq \mu_c$

11º) Si f es una función par en [-c,c], entonces

$$\int_{-c}^{c} f(x)dx = 2\int_{0}^{c} f(x)dx$$

f es par en [-c,c] si f(-x)=f(x) ∀ x∈[-c,c].
Su gráfica es simétrica respecto del eje Y.

12º) Si f es una función impar en [-c,c], entonces

$$\int_{-c}^{c} f(x)dx = 0$$

f es impar en [-c,c] si f(-x)=f(x) ∀ x∈[-c,c].
Su gráfica es simétrica respecto del origen de coordenadas.

CAMBIO DE VARIABLE

Sea $g:A\longrightarrow B$ una aplicación biyectiva, siendo A y B dos conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$, tales que **$x=g(u)$.**

Entonces, si
$$\begin{cases} a=g(c),b=g(d) \\ g \text{ es de clase } C^1 \text{ en } [c,d]=g^{-1}([a,b])\subset A \\ g'(u)\neq 0 \text{ en } [c,d] \end{cases}$$

resulta que
$$\int_a^b f(x)dx=\int_c^d f(g(u))g'(u)du$$

INTEGRALES IMPROPIAS

Definición 6.1

Una integral $\int_a^b f(x)dx$ se llama **integral impropia** si se cumple al menos una de las dos condiciones siguientes

1ª) El intervalo de integración [a,b] no está acotado. Es decir, uno o los dos límites de integración se hacen infinito.

2ª) La función f no está acotada en [a,b]. Los puntos en los que f deja de estar acotada se denominan **singularidades** de f en [a,b].

Hay integrales impropias de tres tipos:

Integral impropia de primera especie cuando cumple la primera condición

$$\int_{-1}^{\infty} x^2 \, dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{1/x^2} dx$$

Integral impropia de segunda especie cuando cumple la segunda condición

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} \, dx \qquad \int_{0}^{2\pi} tgx \, dx$$

Integral impropia de tercera especie cuando cumple las dos condiciones a la vez.

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{1}{x} \, dx \qquad \int_{0}^{\infty} \frac{\ln x}{x(x-1)} \, dx$$

INTEGRALES IMPROPIAS DE PRIMERA ESPECIE

Definición

Si f es una función acotada e integrable en [a,z] ∀z>a definimos:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{z\to\infty} \int_a^{z} f(x)dx$$

cuando ese límite existe y es finito se dice que la integral es **convergente** y **divergente** en caso contrario

Si f es una función acotada e integrable en [z,b] ∀z<b definimos:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{z\to-\infty} \int_z^{b} f(x)dx$$

cuando ese límite existe y es finito se dice que la integral es **convergente** y **divergente** en caso contrario

Si los dos límites de integración son infinitos definimos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{p} f(x)dx + \int_p^{\infty} f(x)dx \qquad \text{con } p \in \mathbb{R}$$

y diremos que es **convergente** cuando lo son las dos integrales impropias del segundo miembro y **divergente** en caso contrario

INTEGRALES IMPROPIAS DE SEGUNDA ESPECIE

Definición

Si f es una función no acotada sólo en el punto **a** de [a,b] definimos:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u\to 0^+} \int_{a+u}^b f(x)dx \qquad \int_0^2 \frac{1}{x}dx = \lim_{u\to 0^+} \int_u^2 \frac{1}{x}dx$$

Cuando ese límite existe y es finito se dice que la integral es **convergente** y **divergente** en caso contrario

Si f es una función no acotada sólo en el punto **b** de [a,b] definimos:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u\to 0^+} \int_a^{b-u} f(x)dx \qquad \int_{-1}^0 \frac{1}{x}dx = \lim_{u\to 0^+} \int_{-1}^{-u} \frac{1}{x}dx$$

Cuando ese límite existe y es finito se dice que la integral es **convergente** y **divergente** en caso contrario

Si f es una función no acotada sólo en el punto **c** del interior de [a,b] definimos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\boxed{u}\to 0^+}\int_a^{c-u} f(x)dx + \lim_{\boxed{v}\to 0^+}\int_{c+v}^{b} f(x)dx$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx = \int_{-1}^{0}\frac{1}{x}dx + \int_{0}^{1}\frac{1}{x}dx = \lim_{u\to 0^+}\int_{-1}^{-u}\frac{1}{x}dx + \lim_{v\to 0^+}\int_{v}^{1}\frac{1}{x}dx$$

y diremos que es **convergente** cuando lo sean **las dos** integrales impropias del segundo miembro y **divergente** en caso contrario

Si esta última integral impropia definida es divergente se llama **Valor principal de Cauchy** de esa integral al límite definido por:

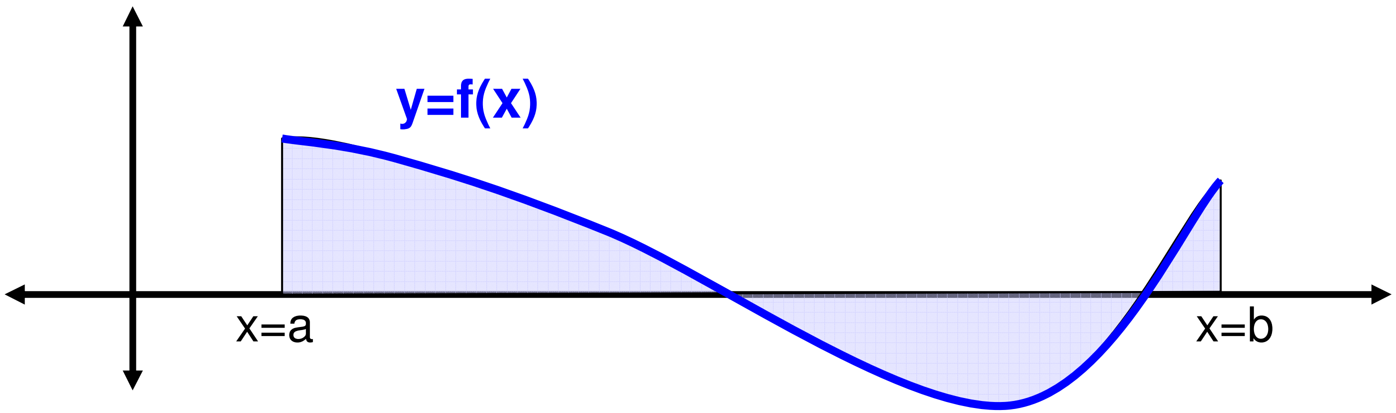
$$\lim_{u\to 0^+}\left(\int_a^{c-u} f(x)dx + \int_{c+u}^{b} f(x)dx\right)$$

APLICACIONES DE LA INTEGRAL RIEMANN

Cálculo de áreas en el plano

Si f es una función integrable Riemann en [a,b], entonces el área Ψ limitada por la curva de ecuación cartesiana y=f(x), el eje de abscisas X y las rectas verticales de ecuaciones respectivas x=a y x=b, viene determinada por:

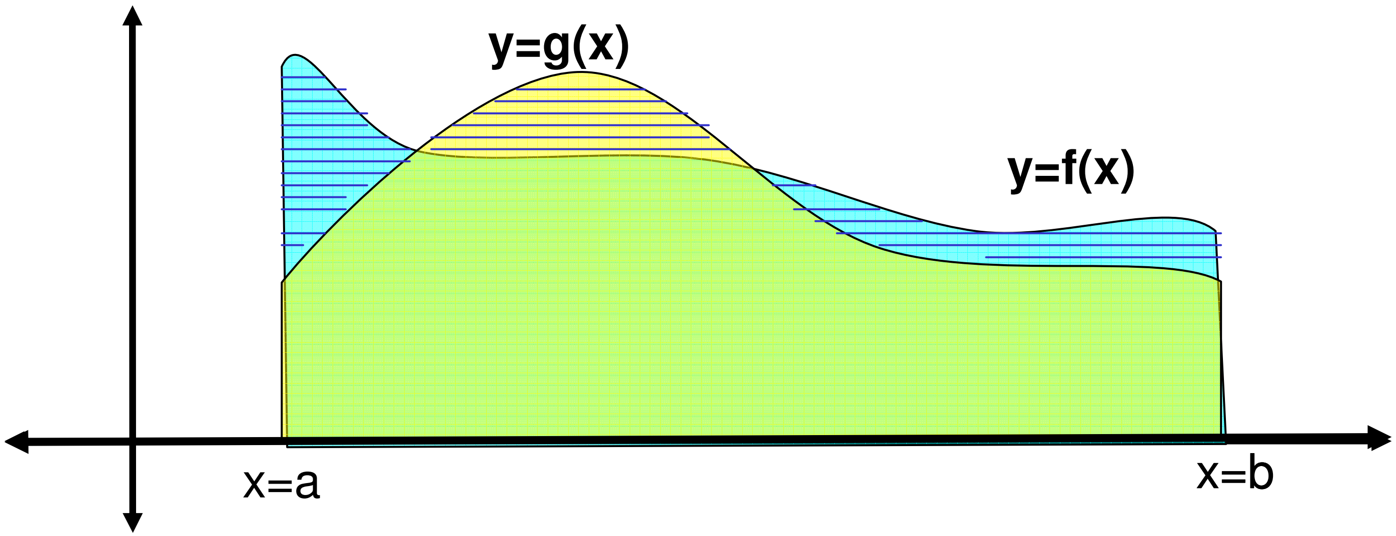
$$\Psi = \int_a^b |f(x)| dx$$



Cálculo de áreas en el plano

Si f y g son dos funciones integrables Riemann en [a,b], entonces el área Ψ encerrada por las curvas y=f(x), y=g(x) y las rectas verticales de ecuaciones respectivas x=a y x=b, viene determinada por:

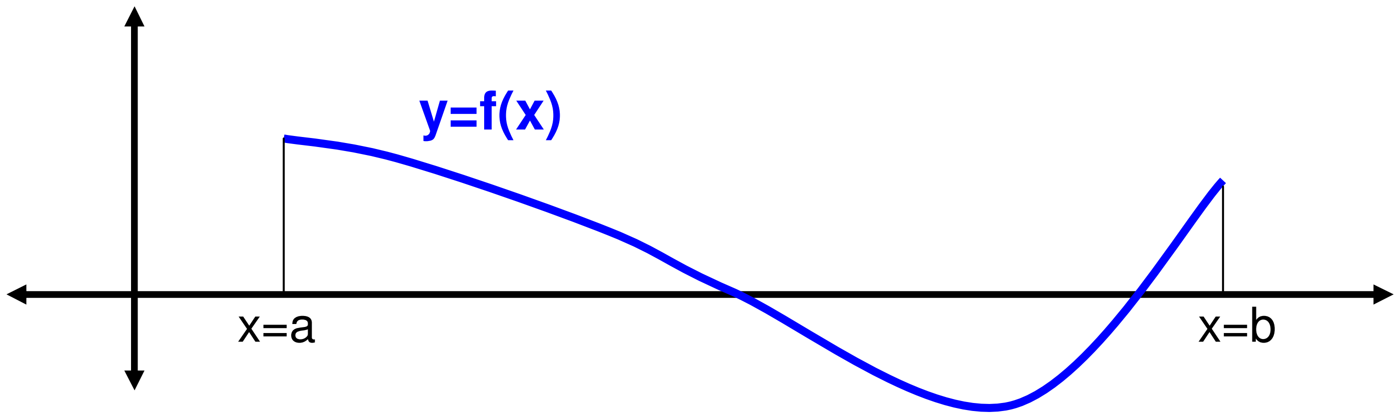
$$\Psi=\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|dx$$



Cálculo de longitudes en el plano

Si f es una función de clase C^1 en [a,b], entonces la longitud Γ de la curva de ecuación cartesiana y=f(x), entre los puntos de coordenadas (a,f(a)) y (b,f(b)) viene determinada por:

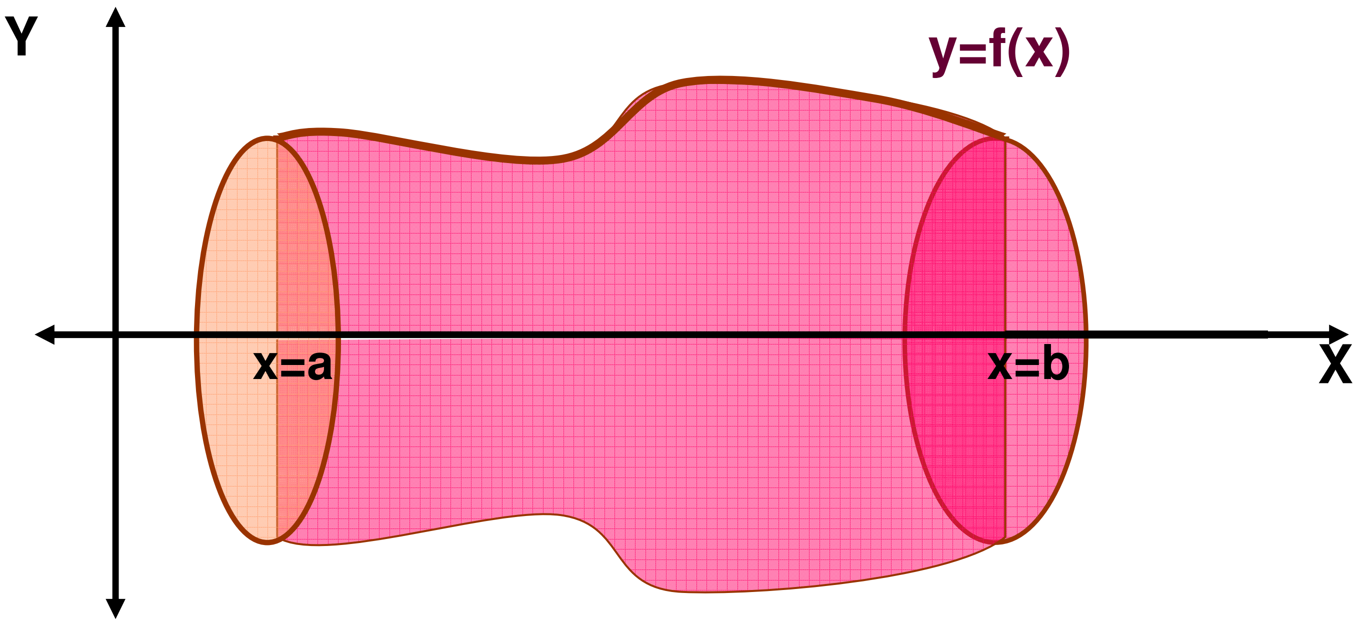
$$\Gamma = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$



Cálculo de áreas de superficies de revolución

Si f es una función de clase C^1 en [a,b], entonces el área Ω de la superficie de revolución engendrada al girar la curva de ecuación cartesiana y=f(x) alrededor del eje de abscisas X entre los puntos de abscisas x=a y x=b, viene determinada por:

$$\Omega = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$



Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución

Si f es una función integrable Riemann en [a,b], entonces el volumen Δ del cuerpo de revolución engendrado al girar la curva de ecuación cartesiana y=f(x), alrededor del eje de abscisas X entre los puntos de abscisas x=a y x=b, viene determinado por:

$$\Delta=\pi\int_a^b [f(x)]^2\ dx$$