FUNCTIONES DE DOS VARIABLES

FUNCIONES REALES DE DOS VARIABLES REALES

Definición

Una **función real de n variables reales** es una aplicación

$f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que hace corresponder a cada n-úpla $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in D$ un número real $z \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(x_1,x_2,\ldots,x_n) &\longrightarrow z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)
\end{aligned}
$$

Ejemplos:

$$
\begin{aligned}
f\colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(x_1,x_2,x_3) &\longrightarrow z=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\
g(x,y) &\longrightarrow z=2x+3y
\end{aligned}
$$

D= dominio de definición de f

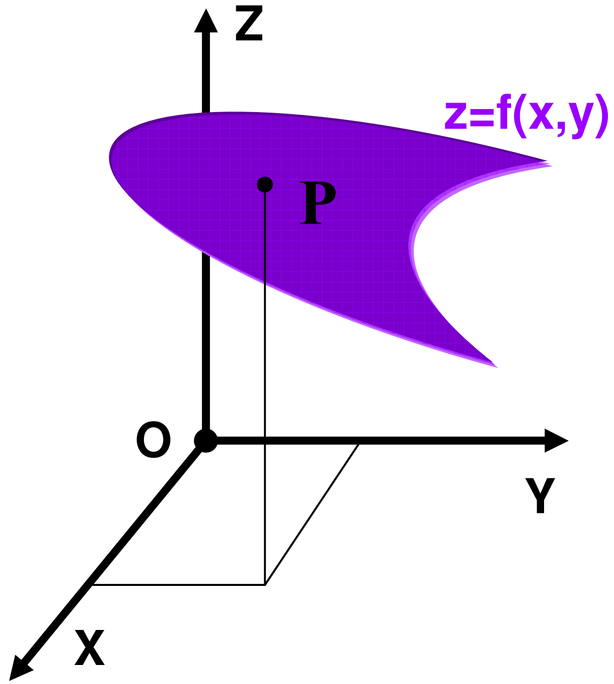
Para n=2

Una **función real de dos variables reales** es una aplicación $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ que hace corresponder a cada par $(x,y) \in D$ un número real $z \in \mathbb{R}$

Ejemplos:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow z = x + xy$$

$$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow z = x^2 + e^{2y}$$



★ Representaciones gráficas

Dado un sistema de referencia cartesiano del espacio usual $\mathbb{R}^3$ de origen O y ejes X,Y y Z, el conjunto de puntos **P** de coordenadas **(x,y,f(x,y)),** define una superficie en $\mathbb{R}^3$ denominada **representación gráfica de f.**

CURVAS DE NIVEL

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Definición

Se llama **curva de nivel m** al conjunto

$$C_m = \{(x,y) \in D \ / \ f(x,y) = m\}$$

El conjunto C_m representa gráficamente la proyección ortogonal, sobre el plano z=0, de la intersección de la superficie de ecuación z=f(x,y) y el plano horizontal de ecuación z=m.

LÍMITES

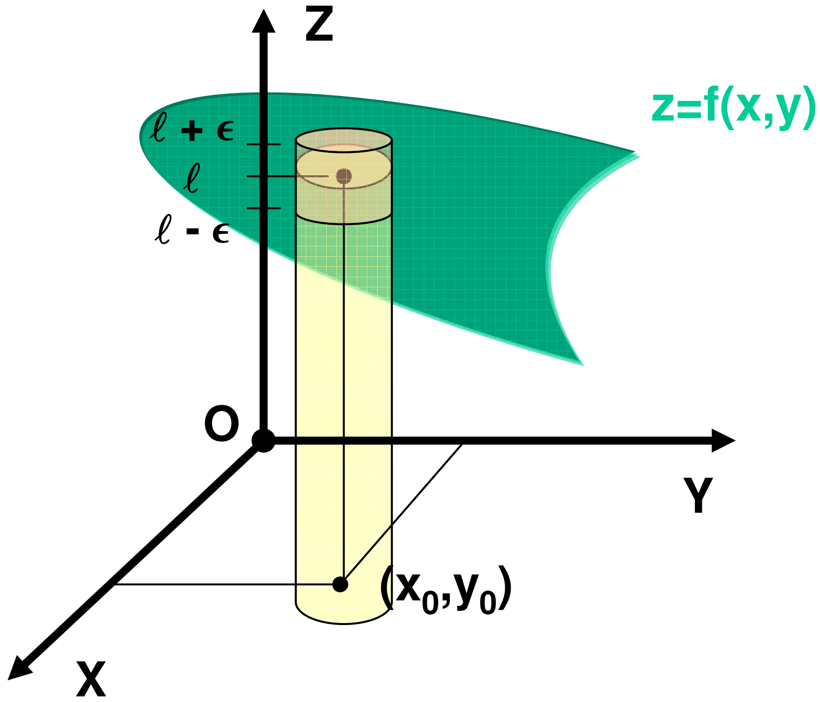
Sea f: $D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y (x_0,y_0) un punto de acumulación de D

Definición $\ell \in \mathbb{R}$ es el **límite** de f en el punto (x_0,y_0) si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \ / \ \forall (x,y) \in D : 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_\varepsilon \Rightarrow$$
$$\left| f(x,y) - \ell \right| < \varepsilon$$

se escribe: $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$

** **No es necesario que la función esté definida en el punto x_0 sino en infinitos puntos a su alrededor**



Z
z=f(x,y)
$\ell + \epsilon$
ℓ
$\ell - \epsilon$
O
Y
(x_0,y_0)
X

Definición

Se llaman **límites reiterados** de f a los límites definidos por:

$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right) \qquad\qquad \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)$$

si es que existen.

Proposición

Si existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\ell$, es único

Proposición

Sean f y g dos funciones tales que:

$$\left.\begin{array}{ll} 1^{\underline{o}}) & \text{f está acotada en un entorno de } (x_0,y_0) \\ & \\ 2^{\underline{o}}) & \displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=0 \end{array}\right\} \text{ entonces, } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)\, g(x,y)]=0$$

Ejemplo: Calcular los límites reiterados de la función

$$f(x,y) = \frac{xy - x + y}{x + y} \qquad \text{cuando } (x,y) \longrightarrow (0,0)$$

$$\lim_{x \to 0} \left[\lim_{y \to 0} \frac{xy - x + y}{x + y} \right] = \lim_{x \to 0} \frac{-x}{x} = -1$$

$$\lim_{y \to 0} \left[\lim_{x \to 0} \frac{xy - x + y}{x + y} \right] = \lim_{y \to 0} \frac{y}{y} = 1$$

Proposición

1º) Para que exista el $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\ell$ el valor ℓ

se debe obtener **cualquiera que sea el camino** por el que nos acerquemos a (x_0,y_0)

2º) Si existen $\lim\limits_{y\to y_0}\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right)$ y $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right)$

es **condición necesaria** para que exista el

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\ell$ que los límites reiterados

coincidan y sean ℓ

Esto quiere decir que:

Si $\lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x,y) \right) \neq \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x,y) \right)$ entonces

no existe $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$

La función $f(x,y) = \dfrac{xy + y^2}{x^2 + y^2}$ tiene límites reiterados distintos en (0,0)

$$\lim_{x \to 0} \left[\lim_{y \to 0} \frac{xy + y^2}{x^2 + y^2} \right] = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x \to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y \to 0} \left[\lim_{x \to 0} \frac{xy + y^2}{x^2 + y^2} \right] = \lim_{y \to 0} \frac{y^2}{y^2} = \lim_{y \to 0} 1 = 1$$

Por tanto no existe el $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{xy + y^2}{x^2 + y^2}$

Puede ser que $\lim\limits_{y\to y_0}\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right) = \lim\limits_{x\to x_0}\left(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right)$

pero que **no** exista $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$

La función $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ tiene iguales los límites reiterados en (0,0)

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right] = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

pero no existe el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ pues al hallarlo según la

dirección y=mx queda:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x(mx)}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{m}{1+m^2}$$

que depende de m

Puede existir $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$ sin que exista alguno o ninguno de los límites reiterados

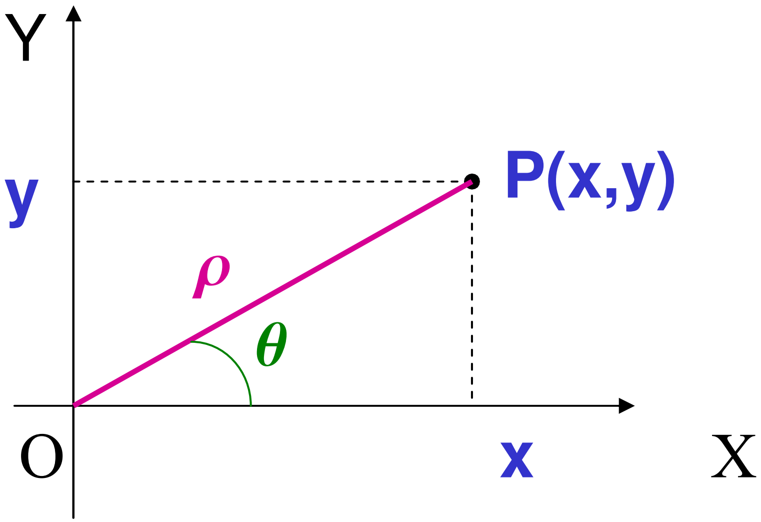
La función $f(x,y) = x\,\text{sen}\,\dfrac{1}{y}$ tiene límite en (0,0) pues es el producto de una función que tiende a 0: x por otra función acotada $\text{sen}\,\dfrac{1}{y}$ y por lo tanto $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\,\text{sen}\,\dfrac{1}{y} = 0$

Sin embargo

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} x\,\text{sen}\,\frac{1}{y}\right] = \lim_{x\to 0} x\left[\lim_{y\to 0} \text{sen}\,\frac{1}{y}\right]$$

no existe pues no existe el $\lim\limits_{y\to 0} \text{sen}\,\dfrac{1}{y}$

Coordenadas polares de un punto



Cartesianas (x,y)

Polares (ρ, θ)

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \quad / \quad \theta \in (-\pi, \pi]$$

Ecuaciones del cambio:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \,\text{sen}\, \theta \end{cases}$$

CONTINUIDAD

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y (x_0,y_0) un punto de D

Definición

f es continua en el punto (x_0,y_0) si $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

Definición

f es continua en un conjunto $A \subseteq D$ si es continua en cada punto de A

Proposición

Si la función f es continua en (x_0,y_0), entonces existe un número real $\delta > 0$ tal que la función f está acotada en el conjunto $D((x_0,y_0),\delta) \cap D$.

es decir, f está acotada en un entorno del punto (x_0,y_0)

Proposición

Si dos funciones f y g son continuas en el punto (x_0,y_0), entonces las funciones f+g, f-g y f.g son también funciones continuas en (x_0,y_0).

Además, si $g(x_0,y_0)\neq 0$, entonces la función f/g es también una función continua en (x_0,y_0).

DERIVABILIDAD

Sea $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ y un punto $\overline{p}=(p_1,p_2,....,p_n)$ perteneciente al interior de D.

Definición

Llamamos derivada parcial de f respecto de la i-ésima variable en el punto $\overline{p}=(p_1,p_2,....,p_n)$ al límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(p_1,p_2,...,p_{i-1},p_i+h,p_{i+1},...,p_n)-f(p_1,p_2,...,p_{i-1},p_i,p_{i+1},...,p_n)}{h}$$

cuando existe y lo representamos por:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{p}) \text{ ó } D_{x_i}f(\overline{p}) \text{ ó } f_{x_i}(\overline{p}) \text{ ó } f_i(\overline{p}) \text{ ó } D_if(\overline{p})$$

Definición

f es derivable en el punto $\overline{p}=(p_1,p_2,....,p_n)$ si existen las derivadas parciales respecto de todas las variables en ese punto

Para hallar la derivada parcial respecto de la variable $x_{i:}$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{p})$ en un punto $\overline{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$, se deriva f respecto esa variable considerando constantes el resto de las variables y posteriormente se asignan los valores $p_1, p_2, ..., p_n$ a las variables $x_1, x_2, ..., x_n$ respectivamente.

Ejemplo: $f(x,y,z)= x^3z +x \operatorname{sen}y – \ln(x+z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0,1) = 3x^2 z + \operatorname{sen}y - \frac{1}{x+z}\Big]_{(1,01)} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0,1) = x \cos y\Big]_{(1,0,1)} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,0,1) = x^3 - \frac{1}{x+z}\Big]_{(1,0,1)} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Para n=2

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y un punto (x_0, y_0) perteneciente al interior de D.

Las dos derivadas parciales de f en (x_0, y_0) están definidas por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

Esas derivadas parciales representan las pendientes de las tangentes a las curvas C_1 y C_2 intersecciones de la superficie de ecuación $z=f(x,y)$ con los planos de ecuaciones respectivas $y=y_0$ y $x=x_0$.

Definición

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y un punto $\overline{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ perteneciente a D.

Se denomina función **derivada parcial de f respecto de la i-ésima variable** denotada $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ ó $D_{x_i} f$ ó f_{x_i} ó f_i ó $D_i f$, a la aplicación

que hace corresponder a cada punto $\overline{p}$ la derivada parcial de f respecto de esa variable en $\overline{p}$.

Ejemplo: $f(x,y,z) = x^3 z + x\,\mathrm{sen} y - \ln(x+z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 z + \mathrm{sen} y - \frac{1}{x+z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cos y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^3 - \frac{1}{x+z}$$

Definición

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y un punto $\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ perteneciente a D.

Se denomina función **derivada parcial segunda** de f respecto de las variables x_i y x_j y se denota $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{p})$ ó $D_{x_i x_j} f(\overline{p})$ ó $f_{x_i x_j}(\overline{p})$ ó $f_{ij}(\overline{p})$ ó $D_{ij} f(\overline{p})$, a la derivada parcial de $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ respecto de la variable x_j en el punto $\overline{p}$.

Análogamente se definen las derivadas parciales de órdenes superiores

Ejemplo: $f(x,y,z)= x^3z + x\,\text{sen}y - \ln(x+z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2z + \text{sen}y - \frac{1}{x+z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^3 - \frac{1}{x+z}$$

Hallar: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^3 f}{\partial z \partial x^2}$ en el punto (1,1,1)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = D_y\left(3x^2z + \text{sen}y - \frac{1}{x+z}\right)_{(1,1,1)} = \cos y\Big]_{(1,1,1)} = \cos 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = D_x\left(3x^2z + \text{sen}y - \frac{1}{x+z}\right)_{(1,1,1)} = 6xz + \frac{1}{(x+z)^2}\Bigg]_{(1,1,1)} = \frac{25}{4}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x^2} = D_x\left(D_x\left(x^3 - \frac{1}{x+z}\right)\right)_{(1,1,1)} = D_x\left(3x^2 + \frac{1}{(x+z)^2}\right)_{(1,1,1)} = 6x - \frac{2}{(x+z)^3}\Bigg]_{(1,1,1)} = \frac{23}{4}$$

Proposición

Si f y g son funciones derivables en el punto $\overline{p}$, entonces f+g, f-g, f.g, también son derivables en $\overline{p}$ y si $g(\overline{p}) \neq 0$ también lo es la función f/g.

Teorema de Schwarz

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y un punto (x_0,y_0) de D.

Si existen las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en un entorno del punto (x_0,y_0) y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ es continua en (x_0,y_0), entonces existe $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ en el punto (x_0,y_0) y se cumple que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

Ejemplo: $f(x,y)= x^3y^2 +3xy^4 -2y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + 3y^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + 12xy^3 - 4y$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = D_y\left(3x^2y^2 + 3y^4\right) = 6x^2y + 12y^3 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = D_x\left(2x^3y + 12xy^3 - 4y\right) = 6x^2y + 12y^3 \end{array}\right\}$$

Coinciden $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Definición

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

f es de **clase C^m** en un abierto $A \subseteq D$, si existen todas las derivadas parciales hasta el orden m en A, y esas derivadas parciales son continuas en A.

f es de **clase C^m** en un punto $\overline{p} \in D$ si existe un abierto $A \subseteq D$ tal que $\overline{p} \in A$ y f es de clase C^m en A.

DIFERENCIALES

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y (x_0,y_0) un punto del interior de D

Definición

f es **diferenciable** en (x_0,y_0) si existe una aplicación lineal $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - L(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Si f es diferenciable en (x_0,y_0) la aplicación lineal L es única ,se llama **diferencial** de f en (x_0,y_0) y se representa **df (x_0,y_0)**

Proposición

Si existen las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en un entorno del punto (x_0,y_0) y son continuas en (x_0,y_0), entonces f es diferenciable en el punto (x_0,y_0)

Si f es diferenciable se llama **diferencial total de f** a la expresión:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Si f no es diferenciable esta expresión no tiene ningún sentido

Se llaman **diferenciales parciales de f** a las expresiones:

$$d_x f = \frac{\partial f}{\partial x}dx, \quad d_y f = \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Ejemplo: **Calcular la diferencial total y las parciales de la función**

$$f(x,y)=2x\,\text{sen}y + 3x^2y$$

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=(2\,\text{sen}\,y+6xy)dx+(2x\cos y+3x)dy$$

$$d_x f=\frac{\partial f}{\partial x}dx=(2\,\text{sen}\,y+6xy)dx$$

$$d_y f=\frac{\partial f}{\partial y}dy=(2x\cos y+3x)dy$$

Proposición

Si f es diferenciable en (x_0,y_0) entonces f es continua y derivable en (x_0, y_0)

!! f derivable $\not\Rightarrow$ f diferenciable !!

Proposición

Si f y g son funciones diferenciables en el punto $\overline{p}$,

entonces f+g, f-g, f.g, también son diferenciables en $\overline{p}$

y si $g(\overline{p}) \neq 0$ también lo es la función f/g.

Proposición

Sea z=f(x,y) la ecuación de una superficie S definida en un cierto dominio D.

S tiene plano tangente en un punto (a,b,f(a,b)) de S si y sólo si la función f es diferenciable en el punto (a,b).

La ecuación del **plano tangente** a S en el punto (a,b,f(a,b)) es

$$z = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right](x-a) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right](y-b) + f(a,b)$$

Ejemplo: Hallar la ecuación del plano tangente al paraboloide elíptico

de ecuación $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6}$ en el punto (2,0,1)

$$z = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right](x-a) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right](y-b) + f(a,b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,0) = \left.\frac{x}{2}\right]_{(2,0)} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,0) = \left.\frac{y}{3}\right]_{(2,0)} = 0$$

Luego la ecuación del plano es: $z = 1(x-2)+0(y-0)+1$

Es decir: $\boxed{z = x-1}$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN COMPUESTA
REGLA DE LA CADENA

Sea **z = f(u,v),** donde **u=u(x,y)**, y **v=v(x,y)**.

Las derivadas parciales se pueden calcular haciendo la sustitución o bien con las siguientes fórmulas:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Ejemplo 1: **Dada la función**

$$z = 2u \text{ sen } v \quad \text{donde} \quad \begin{cases} u = \ln(xy) \\ v = xy \end{cases}$$

Hallar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 2\text{sen} v.\frac{1}{x} + 2u\cos v.y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 2\text{sen} v.\frac{1}{y} + 2u\cos v.x$$

Ejemplo 2: Dada la función

$$z = x^2y - y^2 \quad \textbf{donde} \quad \begin{cases} x = \operatorname{sen} t \\ y = e^t \end{cases}$$

Hallar $\dfrac{dz}{dt}$ **cuando t=0**

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2xy.\cos t + (x^2 - 2y)e^t$$

Para t=0 $\Longrightarrow$ **x = sen0 = 0** $\wedge$ **y= e^0 =1**

y por tanto

$$\left.\frac{dz}{dt}\right]_{t=0} = -2$$

GRADIENTE DE UNA FUNCIÓN

Sean $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y un punto $\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ perteneciente al interior de D

Definición

Llamamos **gradiente** de f en el punto $\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ y lo representamos por $\nabla f(\overline{p})$ al vector definido por:

$$\nabla f(\overline{p}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{p}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\overline{p}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{p}) \right)$$

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, un punto $\overline{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$

perteneciente al interior de D y un vector $\overline{v} \in \mathbb{R}^n - \{\overline{0}\}$

Definición

Llamamos **derivada de f según el vector** $\overline{v}$ en el punto $\overline{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ al límite:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\overline{p} + t\overline{v}) - f(\overline{p})}{t} \quad \text{si existe.}$$

Se representa $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{v}}(\overline{p}) = D_{\overline{v}} f(\overline{p})$

Si $\overline{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ es un vector unitario, a este límite se le llama **derivada direccional de f según el vector** $\overline{v}$ **en el punto** $\overline{p}$

Ejemplo: Hallar la derivada de la función

$f(x,y,z)= x^2z +x\,y$ en el punto (1,1,1) según el vector

$\overline{v} = (1,0,-1)$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{v}}(1,1,1) = \lim_{t\to 0}\frac{f(\overline{p}+t\overline{v})-f(\overline{p})}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f[(1,1,1)+t(1,0,-1)]-f(1,1,1)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f(1+t,1,1-t)-2}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^2(1-t)+(1+t)-2}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t^3+3t^2+4t}{t} = 4$$

Sean $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y un punto $\overline{p} = (p_1, p_2)$ perteneciente al interior de D

Propiedades

- El gradiente de f en el punto $\overline{p}$ es ortogonal en $\overline{p}$ a la curva de nivel que pasa por ese punto

- El vector gradiente $\nabla f(\overline{p})$ define la dirección, el sentido y la magnitud de la máxima pendiente, es decir, la dirección según la cual la derivada direccional es máxima

- Las derivadas parciales son derivadas direccionales respecto a los vectores de la base canónica

- La derivada direccional se puede escribir como el producto escalar del vector gradiente por un vector unitario $\overline{v}$

$$D_{\overline{v}} f(\overline{p}) = \nabla f(\overline{p}).\overline{v} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{p}) v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\overline{p}) v_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{p}) v_n$$

Definición

Sean las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_m$ definidas de $D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y derivables en un punto $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ de D

Se llama **matriz jacobiana del sistema de funciones** $f_1, f_2, \ldots, f_m$ **en** $\bar{p}$ a la matriz de orden mxn

$$\left(\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right)_{\bar{p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{p}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{p}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{p}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{p}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{p}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{p}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{p}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\bar{p}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{p}) \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Hallar la matriz jacobiana de las funciones

$$f_1(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2\,; \quad f_2(x_1,x_2,x_3)=x_2-2x_3$$

en el punto (1,2,1)

$$J_{\bar{f}}(1,2,1)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{pmatrix}_{(1,2,1)} =$$

$$=\begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{(1,2,1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

En particular, para m=n, la matriz jacobiana es cuadrada y podemos hallar su determinante que se llama **jacobiano** del sistema de funciones $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ en $\bar{p}$

Ejemplo: Hallar el jacobiano del sistema de funciones {f,g} definidas por:

$$f(x,y) = x^2+y^2 \,,\quad g(x,y) = x(1-y) \quad \text{en el punto} \quad (1, -1)$$

$$\mathrm{Det}\left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\right)_{(1,-1)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}_{(1,-1)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1-y & -x \end{vmatrix}_{(1,-1)} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 4 = 2$$

FUNCIONES IMPLÍCITAS

Definición

Se dice que la ecuación F(x,y,z)=0 define la función de dos variables

z=f(x,y) en un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ si se cumple que

$$F(x,y,f(x,y)) = 0 \quad \forall (x,y) \in D$$

Proposición Derivadas de primer orden

Sea F(x,y,z)=0

Derivando respecto a x $\quad \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ si $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$

Derivando respecto a y $\quad \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ si $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$

EXTREMOS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ un punto perteneciente a D

Definición

f tiene un **máximo local** en D en el punto $\overline{p}$, si para todos los puntos $\overline{x}$ de un entorno de $\overline{p}$ se verifica que $f(\overline{p}) \geq f(\overline{x})$

f tiene un **mínimo local** en D en el punto $\overline{p}$, si para todos los puntos $\overline{x}$ de un entorno de $\overline{p}$ se verifica que $f(\overline{p}) \leq f(\overline{x})$

Los máximos y mínimos locales se llaman **extremos locales**.

Definición

f tiene un **máximo local estricto** en D en el punto $\overline{p}$, si para todos los puntos $\overline{x}$ de un entorno de $\overline{p}$ tales que $\overline{x} \neq \overline{p}$ se verifica que

$$f(\overline{p}) > f(\overline{x})$$

f tiene un **mínimo local estricto** en D en el punto $\overline{p}$, si para todos los puntos $\overline{x}$ de un entorno de $\overline{p}$ tales que $\overline{x} \neq \overline{p}$ se verifica que

$$f(\overline{p}) < f(\overline{x})$$

Los máximos y mínimos locales estrictos se llaman **extremos locales estrictos.**

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\overline{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in D$

Definición

f tiene un **máximo global o absoluto** en D en el punto $\overline{p}$

si $\forall \overline{x} \in D$ se verifica que $f(\overline{p}) \geq f(\overline{x})$

f tiene un **mínimo global o absoluto** en D en el punto $\overline{p}$

si $\forall \overline{x} \in D$ se verifica que $f(\overline{p}) \leq f(\overline{x})$

Proposición

Si f es continua en un compacto (cerrado y acotado) D entonces f alcanza un máximo global y un mínimo global en D.

Se pueden alcanzar en más de un punto

Proposición

Sea f una función derivable en un punto $\overline{p}$

Si $\overline{p}$ es un extremo local de f entonces, $\nabla f(\overline{p}) = \overline{0}$

Es decir, para que haya un máximo o un mínimo local en un punto $\overline{p}$ es necesario que en ese punto se anulen todas las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{p}) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\overline{p}) = 0 \qquad \ldots \qquad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{p}) = 0$$

Esta condición no es suficiente

Definición

Sea f una función derivable en D

Se llaman **puntos críticos o estacionarios** de f en D los puntos $\overline{p}$ que verifican la condición $\nabla f(\overline{p}) = \overline{0}$

Definición

Se llama **punto de silla** a un punto crítico de f que no es un máximo ni un mínimo local de f

Definición

Sea f de clase C^2 en un entorno de un punto interior $\overline{p} \in D$

La matriz :

$$H(f)_{\overline{p}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\overline{p}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\overline{p}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\overline{p}) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\overline{p}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\overline{p}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\overline{p}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\overline{p}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\overline{p}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\overline{p}) \end{pmatrix}$$

de orden nxn se llama **matriz hessiana** de f en $\overline{p}$

Los n determinantes

$$H_j = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\overline{p}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\overline{p}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_j}(\overline{p}) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\overline{p}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\overline{p}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_j}(\overline{p}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_1}(\overline{p}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_2}(\overline{p}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\overline{p}) \end{vmatrix}$$

para j=1,2,...,n se llaman **menores preferentes** de la matriz hessiana $H(f)_{\overline{p}}$

Proposición

Sea f de clase C^2 en un entorno de un punto crítico $\bar{p}$

1º) Si para $j = 1,2,...,n$, se cumple que $H_j < 0$ si j es impar y $H_j > 0$ si j es par, entonces $\bar{p}$ es un máximo local

2º) Si $H_j > 0$ para $j = 1,2,...,n$, entonces $\bar{p}$ es un mínimo local

3º) Si $H_n \neq 0$ y no se cumple ninguno de los dos apartados anteriores, entonces $\bar{p}$ es un punto de silla

Para n=2

1º) $H_1 < 0$ y $H_2 > 0 \Longrightarrow$ Máximo local

2º) $H_1 > 0$ y $H_2 > 0 \Longrightarrow$ Mínimo local

3º) $H_2 < 0 \Longrightarrow$ Punto de silla

EXTREMOS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES CONDICIONADOS

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, las m funciones $f_1, f_2, \ldots, f_m$ (**m < n**) definidas en D y $\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ un punto solución del sistema:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

ligaduras

Definición

f tiene un **máximo local condicionado por el sistema de ecuaciones (1)** en el punto $\overline{p}$ si para todos los puntos $\overline{x}$ de un entorno de $\overline{p}$ se verifica que $f(\overline{p}) \geq f(\overline{x})$

f tiene un **mínimo local condicionado por el sistema de ecuaciones (1)** en el punto $\overline{p}$ si para todos los puntos $\overline{x}$ de un entorno de $\overline{p}$ se verifica que $f(\overline{p}) \leq f(\overline{x})$

Formamos la función auxiliar

$$h(\overline{x}) = f(\overline{x}) + \lambda_1 f_1(\overline{x}) + \lambda_2 f_2(\overline{x}) + \cdots + \lambda_m f_m(\overline{x}) \qquad \forall \overline{x} \in D$$

y la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Los coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ son parámetros que hay que hallar y se llaman **multiplicadores de Lagrange**

Proposición

Supongamos que las funciones $f, f_1, f_2, \ldots, f_m$ son de clase C^1 en un conjunto abierto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ y consideremos un punto $\overline{p}$ de S tal que la matriz A evaluada en el punto $\overline{p}$ sea de rango fila completo (es decir, rango(A)=m).

Entonces, si $\overline{p}$ es un extremo local de f, condicionado por el sistema de ecuaciones (1), resulta que existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ únicos tales que la función auxiliar h tiene en $\overline{p}$ un punto crítico.

Es decir, para hallar los extremos condicionados de f tenemos que hallar los multiplicadores de Lagrange y los puntos críticos de la función auxiliar h teniendo también en cuenta las ligaduras

¿ Son máximos o mínimos?

<u>Definición</u> Si $f, f_1, f_2, \ldots, f_m$ son de clase C^2 en D, la matriz:

$$
\begin{array}{c c c}
 & B = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \\
\hline
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_n} \\
\frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} & \ldots & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_n \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 h}{\partial x_n^2}
\end{array}\right) & \begin{array}{c} A \\ \\ H \end{array} \\
A^T & &
\end{array}
$$

se llama **matriz hessiana orlada**

Proposición

Consideremos la matriz hessiana orlada B evaluada en un punto crítico $\overline{p}$ de la función auxiliar h con los multiplicadores de Lagrange obtenidos anteriormente

1º) Si los últimos n-m menores preferentes de la matriz B tienen como signo $(-1)^m$, resulta que la función f tiene un mínimo local en el punto $\overline{p}$ condicionado por el sistema de ecuaciones (1).

2º) Si los últimos n-m menores preferentes de la matriz B alternan su signo comenzando por el signo $(-1)^{m+1}$, resulta que la función f tiene un máximo local en el punto $\overline{p}$ condicionado por el sistema de ecuaciones (1).

Para n=2

Proposición

f: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y hay una única ligadura dada por la ecuación $f_1(x,y)=0$, la función auxiliar es $h = f+\lambda f_1$ y la matriz hessiana orlada queda:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

Evaluamos B en un punto crítico. Entonces:

1º) Si $|B|<0$ la función f tiene un mínimo local condicionado en ese punto

2º) Si $|B|>0$ la función f tiene un máximo local condicionado en ese punto