FUNCIONES DE UNA VARIABLE

DEFINICIONES

Una **función real de una variable real** es una aplicación $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que hace corresponder a cada número real $x \in D$ un número real $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f: D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow y=f(x) \end{aligned}$$

D= dominio de definición de f

★ **Representaciones gráficas**

f está **acotada** en un entorno E de un punto $x_0 \in D$ si $\exists\, c \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f(x)| < c \quad \forall\, x \in E$

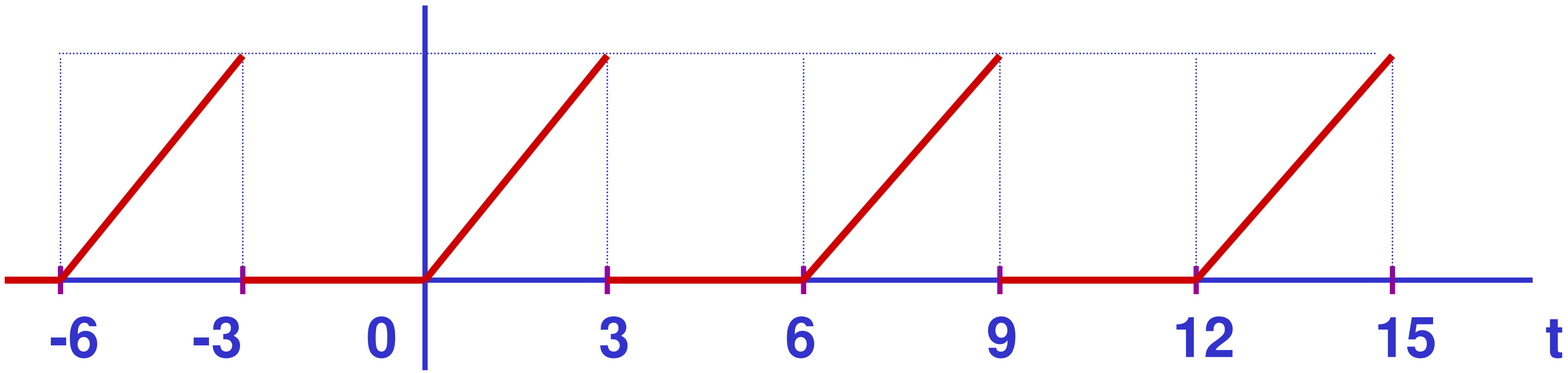
Sea **f** una función real de una variable real definida en $\mathbb{R}$

La **función f** es **periódica** si existe **P**>0 tal que:

$$\mathbf{f(t) = f(t+P) = f(t+2P) = \ldots = f(t+nP)} \quad \text{con} \quad \mathbf{n \in \mathbb{Z}} \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbb{R}$$

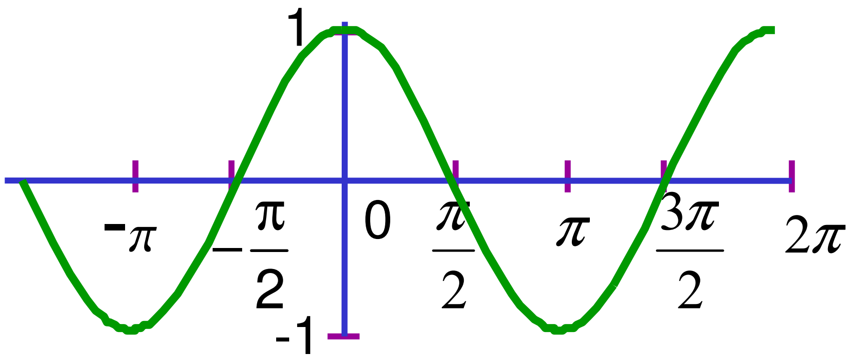
P es el **periodo** de **f**

$$f(t) = \begin{cases} 0 \ \ \text{si} \ \ -3 \le t < 0 \\ 2t \ \ \text{si} \ \ 0 \le t \le 3 \end{cases} \quad \text{periódica de periodo } P = 6$$



Definición

f función par cuando **f(- t)= f(t)** $\forall t \in D$ (dominio)



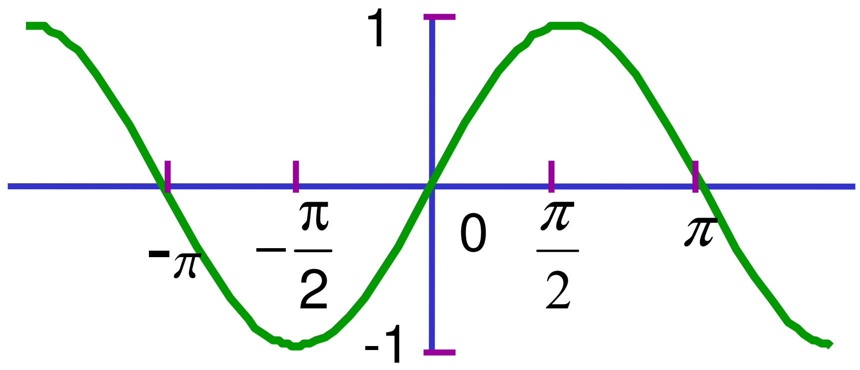
f(t)=cost **función par** y **periódica** de periodo $\mathbf{2\pi}$

- La **gráfica** de **f** es **simétrica** respecto al eje **OY**
- Para **f** **par**, se cumple:

$$\boxed{\int_{-T}^{T} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{T} f(t)\,dt}$$

Definición

f **función impar** cuando **f(-t)= -f(t)** $\forall t \in D$



f(t)=sent **función impar** y **periódica** de periodo $\mathbf{2\pi}$

- La **gráfica** de **f** es **simétrica** respecto al origen **O**
- Para **f** **impar**, se cumple:

$$\boxed{\int_{-T}^{T} f(t)\, dt = 0}$$

Definiciones

Sea una función $f:D\subseteq\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$

f es **creciente** en un intervalo $I\subset D$ si
$\forall x_1,x_2\in I$ siendo $x_1<x_2$ se cumple que $f(x_1)\leq f(x_2)$

f es **decreciente** en un intervalo $I\subset D$ si
$\forall x_1,x_2\in I$ siendo $x_1<x_2$ se cumple que $f(x_1)\geq f(x_2)$

f es **estrictamente creciente** en un intervalo $I\subset D$ si
$\forall x_1,x_2\in I$ siendo $x_1<x_2$ se cumple que $f(x_1)<f(x_2)$

f es **estrictamente decreciente** en un intervalo $I\subset D$ si
$\forall x_1,x_2\in I$ siendo $x_1<x_2$ se cumple que $f(x_1)>f(x_2)$

f está **acotada superiormente si** $\exists\, k \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) \leq k$ $\forall\, x \in D$

f está **acotada inferiormente si** $\exists\, k \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) \geq k$ $\forall\, x \in D$

f está **acotada** si lo está superior e inferiormente

f está **acotada** en un entorno E de un punto $x_0 \in D$ si $\exists\, c \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f(x)| < c$ $\forall\, x \in E$

ALGUNAS FUNCIONES REALES

FUNCIONES QUE HAY QUE CONOCER

- Función valor absoluto
- Función exponencial
- Función logarítmica
- Función potencial

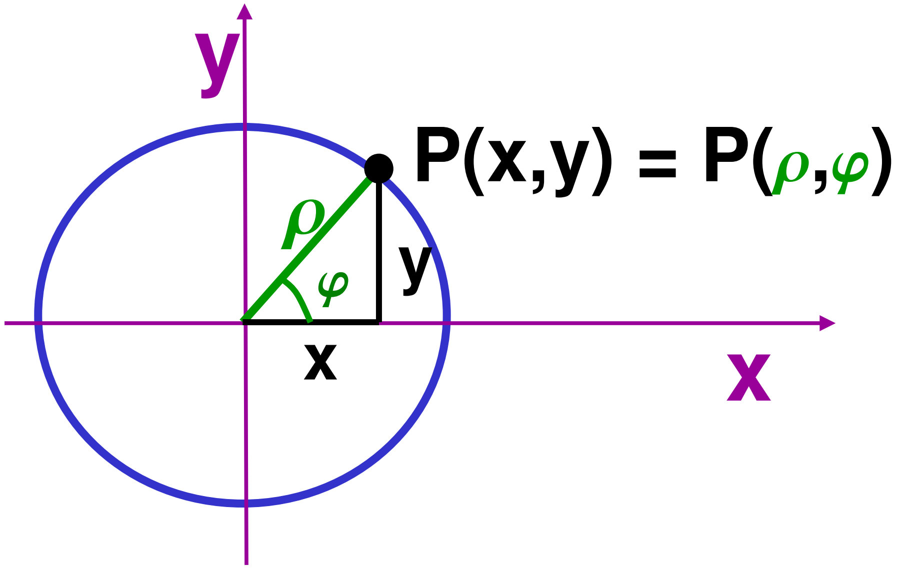
ECUACIONES DE CURVAS PLANAS EN COORDENADAS CARTESIANAS

ECUACIONES QUE HAY QUE CONOCER

- De la recta en distintas formas
- De la circunferencia
- De la elipse
- De la hipérbola
- De la parábola

COORDENADAS POLARES

El cambio viene dado por:



$$\begin{cases} x = \rho \ \cos\varphi \\ y = \rho \ \mathrm{sen}\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

$$\rho \geq 0 \ ; \quad -\pi < \varphi \leq \pi$$

FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Definiciones

$$\text{senh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Se cumple que:

$sh(-x) = -sh(x)$ $\longrightarrow$ función impar

$ch(-x) = ch(x)$ $\longrightarrow$ función par

Además: $sh(0)=0$, $ch(0)=1$ $\wedge$ $chx \geq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Definiciones

$$\mathbf{thx} = \frac{\mathbf{shx}}{\mathbf{chx}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$\mathbf{cthx} = \frac{\mathbf{chx}}{\mathbf{shx}} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{\mathbf{thx}}$$

Se cumple que:

th(-x) = - sh(x) $\longrightarrow$ función impar

cth(-x) = - ch(x) $\longrightarrow$ función impar

Además: th(0)=0 , pero $\nexists$ ch(0)=1

Relación fundamental de la trigonometría hiperbólica

$$ch^2x - sh^2x = 1$$

Además se cumplen las expresiones:

$sh(x+y) = shx\ chy + chx\ shy$

$sh(x-y) = shx\ chy - chx\ shy$

$ch(x+y) = chx\ chy + shx\ shy$

$ch(x-y) = chx\ chy - shx\ shy$

$ch2x = ch^2x+sh^2x=2ch^2x-1=2sh^2x+1$

$sh2x = 2shx\ chx$

$$chx = \sqrt{\frac{ch2x+1}{2}}$$

$$shx = \sqrt{\frac{ch2x-1}{2}} \quad si \quad x > 0 \quad \wedge \quad shx = -\sqrt{\frac{ch2x-1}{2}} \quad si \quad x < 0$$

FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

Definiciones

Argumento seno hiperbólico

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}\,) = \arg shx$$

D=(-∞,∞)

Argumento coseno hiperbólico

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}\,) = \arg chx$$

$$y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}\,) = \arg chx$$

D=[1, ∞)

Argumento tangente hiperbólica

$$y = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \arg thx$$

D=(-1,1)

CONTINUIDAD

Sea $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ y x_0 un punto de D

Definición

f es **continua** en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \ / \ \forall x \in D : 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

f es **discontinua** en x_0 si no es continua en ese punto

Definición

f es **continua por la derecha** en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Definición

f es **continua por la izquierda** en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Definición

f es **continua en un conjunto $A \subseteq D$** si es continua $\forall x \in A$

f es **continua en un intervalo cerrado [a,b]** si:

- f es continua en (a,b)
- f es continua por la derecha en a
- f es continua por la izquierda en b

f es continua en un intervalo si se puede dibujar su gráfica sin levantar el lápiz del papel

Proposición

f es continua en $x_0 \Leftrightarrow$ f es continua por la derecha y por la izquierda en x_0

Proposición

Si f es continua en x_0 entonces $\exists\, \delta > 0$ tal que f está acotada en

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$

Proposición

f continua en [a,b] $\Longrightarrow$ f acotada en [a,b]

Proposición

Si f y g son funciones continuas en x_0 entonces f+g, f-g y f.g también son continuas en x_0

Además si $g(x_0) \neq 0$ entonces f/g es continua en x_0

Este resultado se puede generalizar para funciones continuas en un intervalo

TIPOS DE DISCONTINUIDADES EN UN PUNTO

Sea $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ y x_0 un punto de D

Discontinuidad evitable

Si $$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$$

Se puede *evitar* prolongando la f considerando la función continua f_1 dada por:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) & \text{si} \quad x = x_0 \end{cases}$$

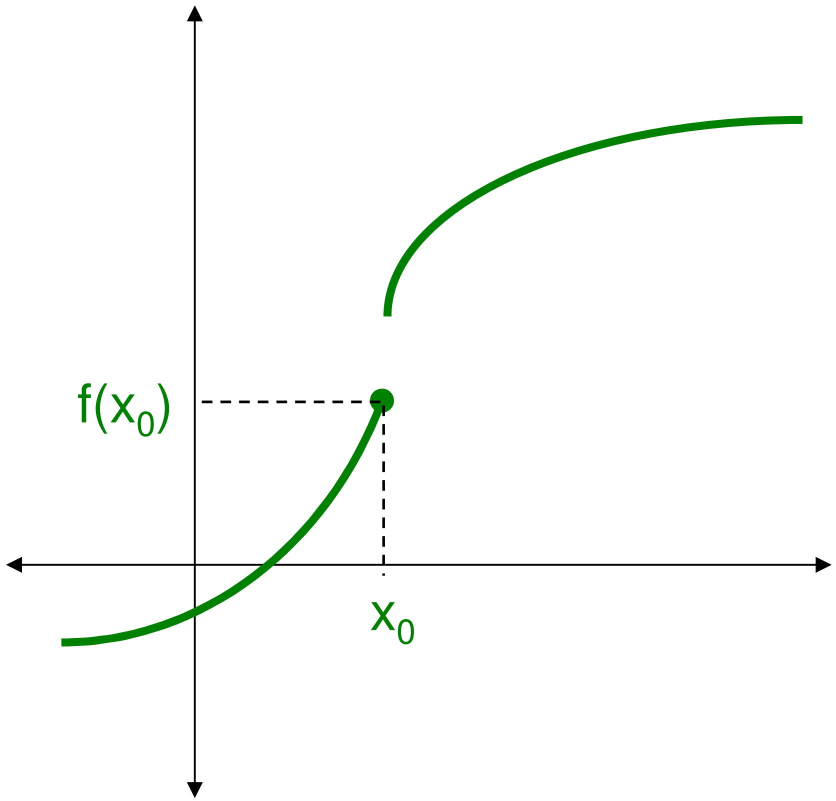
Discontinuidad de primera especie

Si $$\lambda_1 = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lambda_2$$

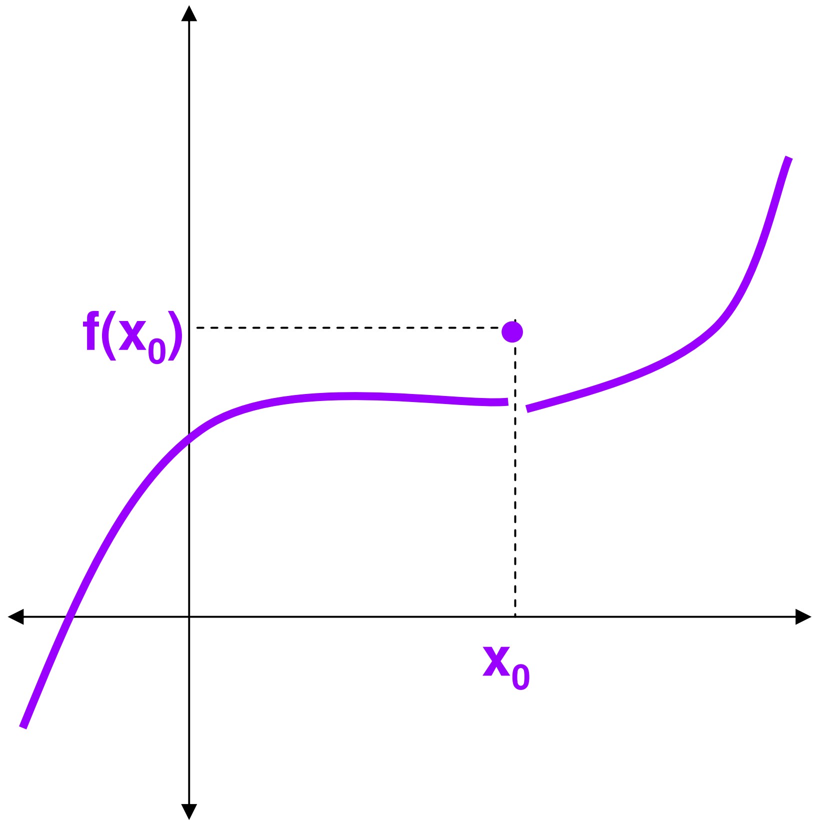
La diferencia $\lambda_1 - \lambda_2$ se llama salto de f en x_0

Discontinuidad de segunda especie

Si no existe alguno de los dos límites laterales



f(x0)
x0



f(x0)
x0

Proposición

Las funciones siguientes son continuas en sus dominios de definición

$f(x)=x^n$

$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x+a_0$

$$f(x)=\sqrt[n]{x}$$

$$f(x)=\frac{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1 x+b_0}{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0}$$

$f(x)=a^x$, $f(x)=\log_a x$

$f(x)=\text{sen}x$, $f(x)=\cos x$, $f(x)=\text{tg}x$, $f(x)=\text{cotg}x$

$f(x)=\text{arcsen}x$, $f(x)=\arccos x$, $f(x)=\text{arctg}x$

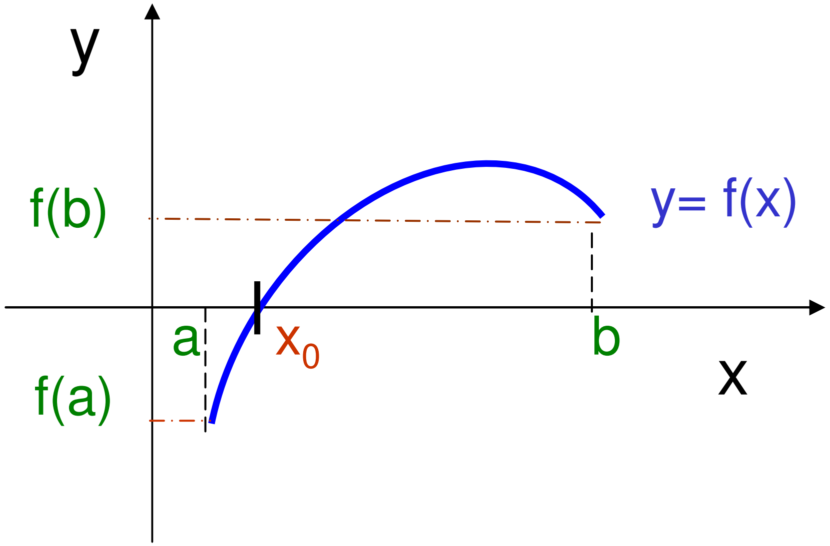
$$\mathbf{f(x) = senhx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}},$$

$$\mathbf{f(x) = coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

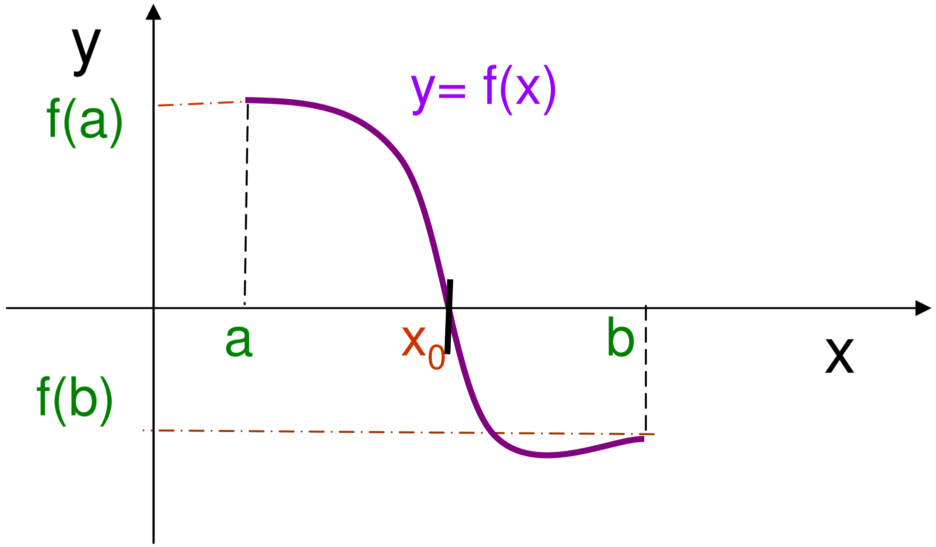
Teorema de Bolzano

Si f es continua en [a,b] y f(a) y f(b) son de signo contrario, entonces $\exists x_0 \in (a,b) \,/\, f(x_0)=0$

$$\left.\begin{array}{l}\text{f es continua en [a,b]}\\ \text{f(a) y f(b) de signo contrario}\end{array}\right\}\ \text{entonces } \exists x_0 \in (a,b) \,/\, f(x_0)=0$$

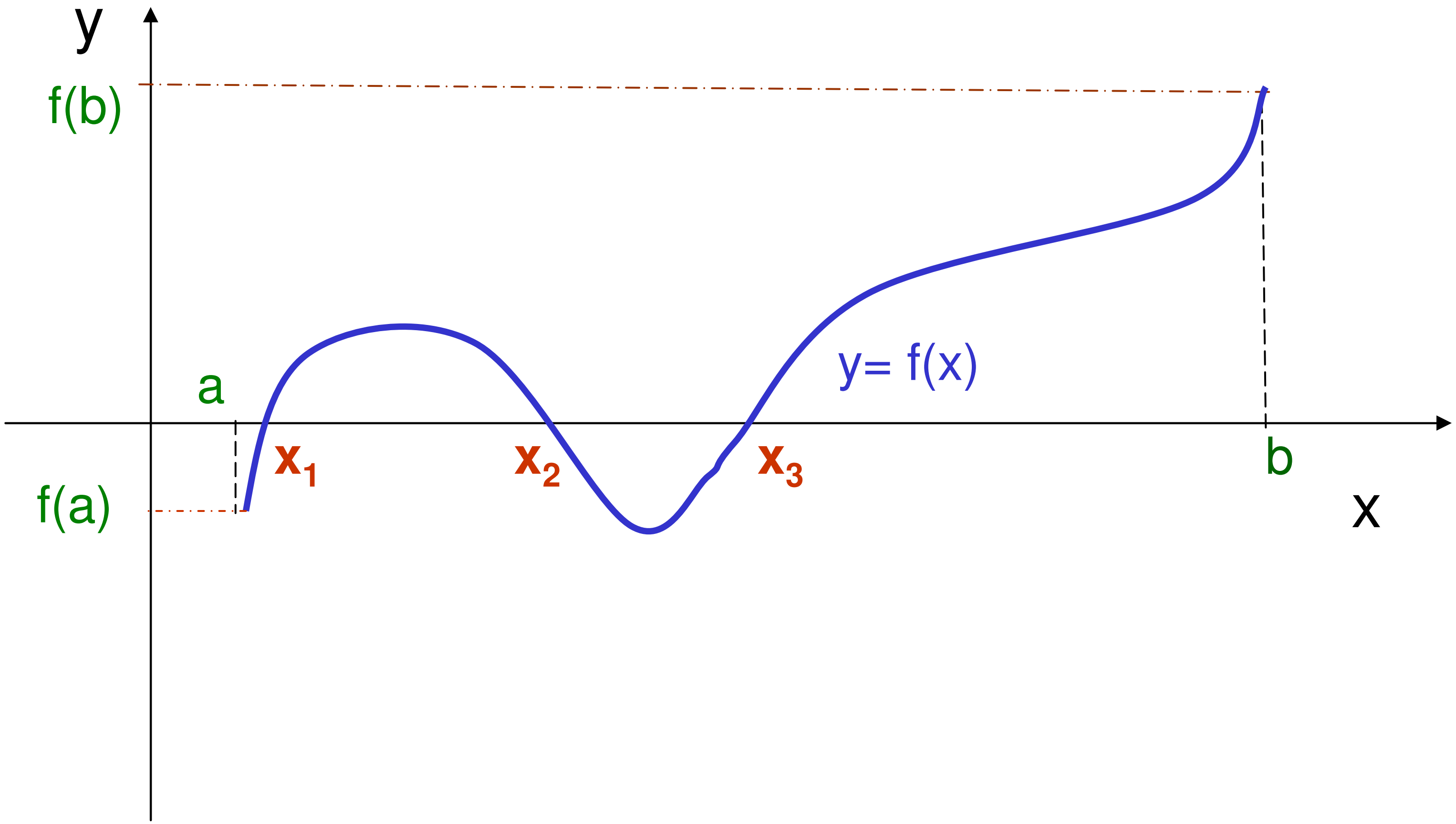


$f(a)<0,\ f(b)>0$



$f(a)>0,\ f(b)<0$

Puede haber más de un punto que verifique la proposición.



DERIVADAS Y DIFERENCIALES

Sea $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ y x_0 un punto interior de D

Definición

f es **derivable** en x_0 si existe y es finito el límite: $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$f'(x_0)$ = derivada de f en x_0

Definición **Derivada por la derecha**

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Definición **Derivada por la izquierda**

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Proposición

$$\exists f'(x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists f'_+(x_0) \ \wedge \ \exists f'_-(x_0) \\ f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \end{cases}$$

Definición

Sea f definida en un conjunto abierto D.

f es **derivable** en D si f es derivable $\forall\, x_0 \in D$.

Si f es derivable en D, a la función que hace corresponder a cada punto $x \in D$ su derivada f'(x) se la denomina **función derivada** de f en D, y se escribe: **f'**

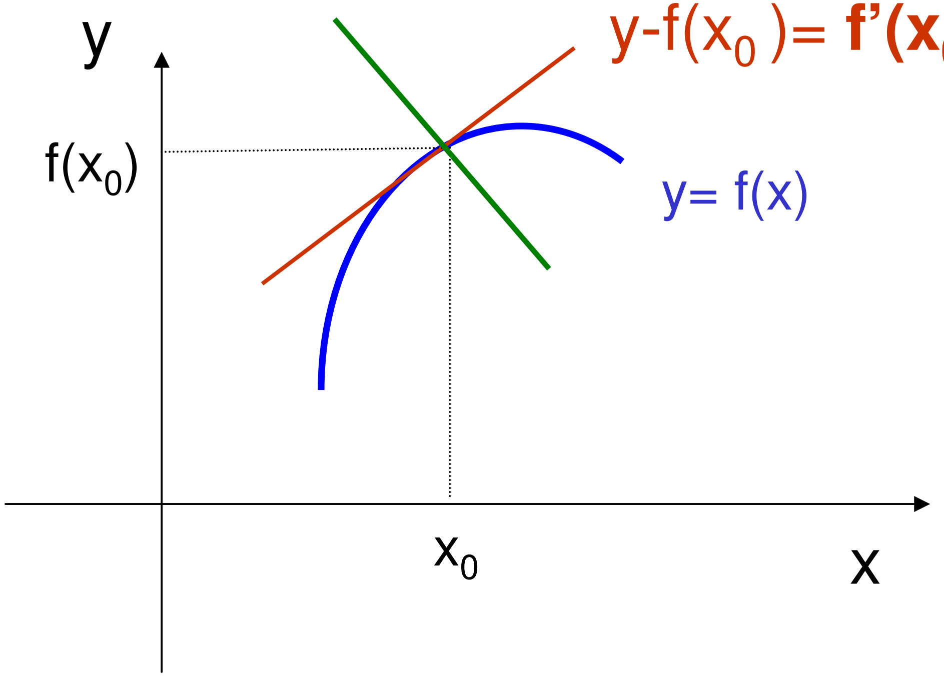
$$\begin{aligned} \mathbf{f'} : \mathbf{D} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f'(x) \end{aligned}$$

Interpretación geométrica de la derivada

La derivada de una función f en un punto x_0 es la pendiente de la recta tangente a la curva y=f(x) en el punto $(x_0, f(x_0))$

$$y - f(x_0) = \mathbf{f'(x_0)}\,(x - x_0)$$

Ecuación de la recta tangente

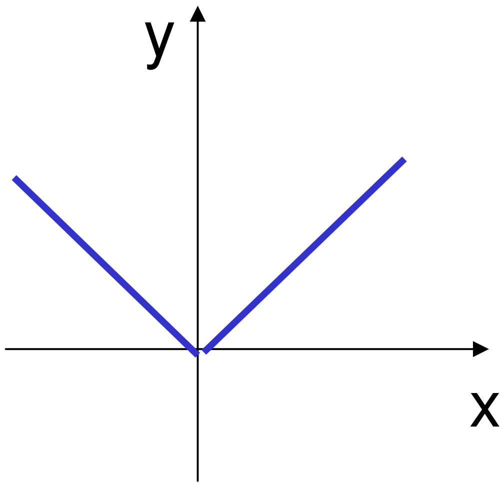


La ecuación de la recta normal es: $y - f(x_0) = \dfrac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

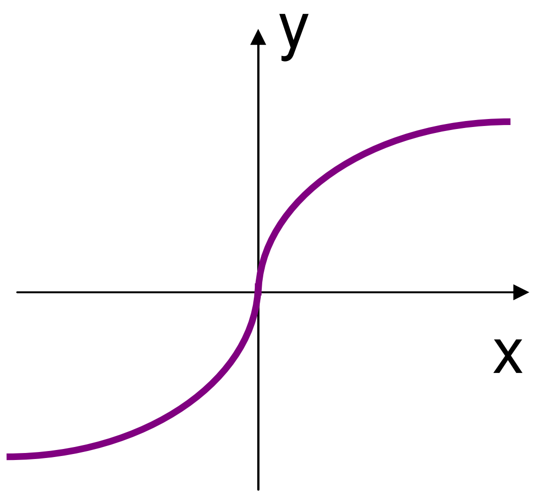
Proposición

Una función derivable en un punto es continua en ese punto.

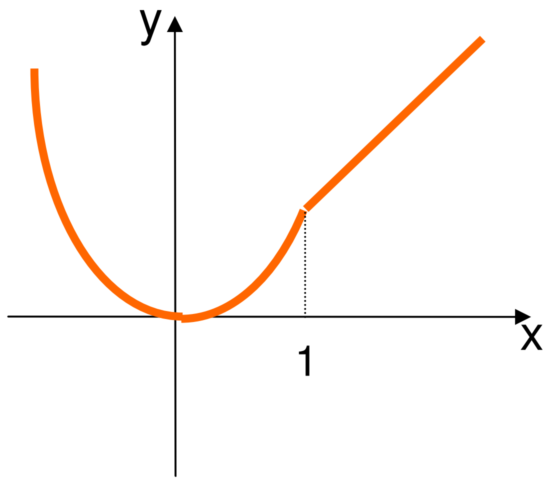
¡¡ El recíproco no es necesariamente cierto !!



$y = |x|$



$y = x^{1/3}$



$$y = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$$

Proposición

Si f y g son funciones derivables en x_0 entonces

f+g, f-g y f.g también son derivables en x_0

Además si $g(x_0) \neq 0$ entonces f/g es derivable en x_0

Se verifica que:

1º) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

2º) $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$

3º) $(f.g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$

4º) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

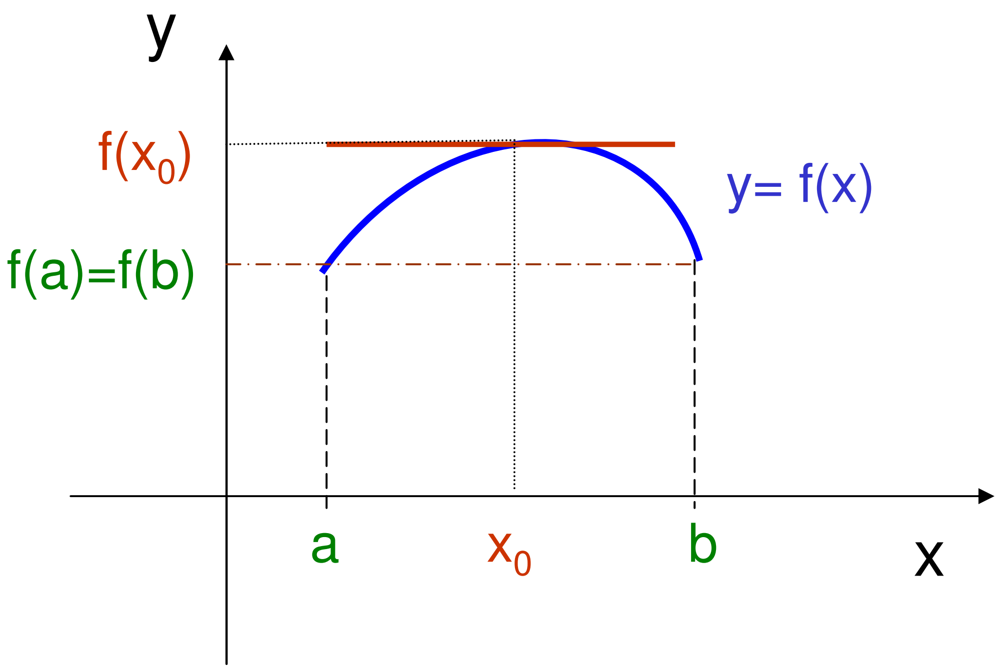
Teorema de Rolle

Si f es continua en [a,b]

derivable en (a,b)

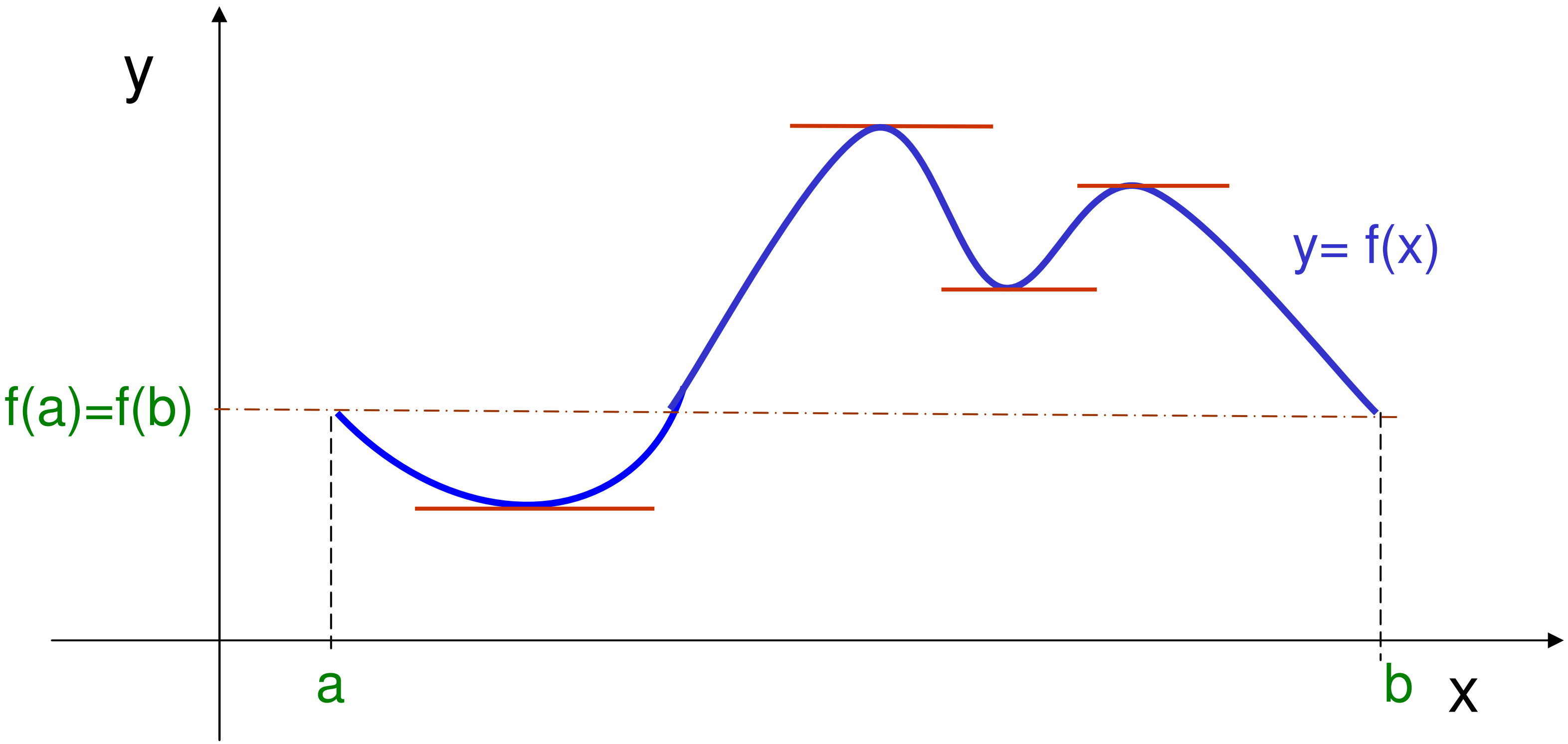
f(a) = f(b)

$$\left.\begin{array}{l} \text{continua en } [a,b] \\ \text{derivable en } (a,b) \\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \text{ entonces } \exists\, x_0 \in (a,b) \;/\; f'(x_0) = 0$$



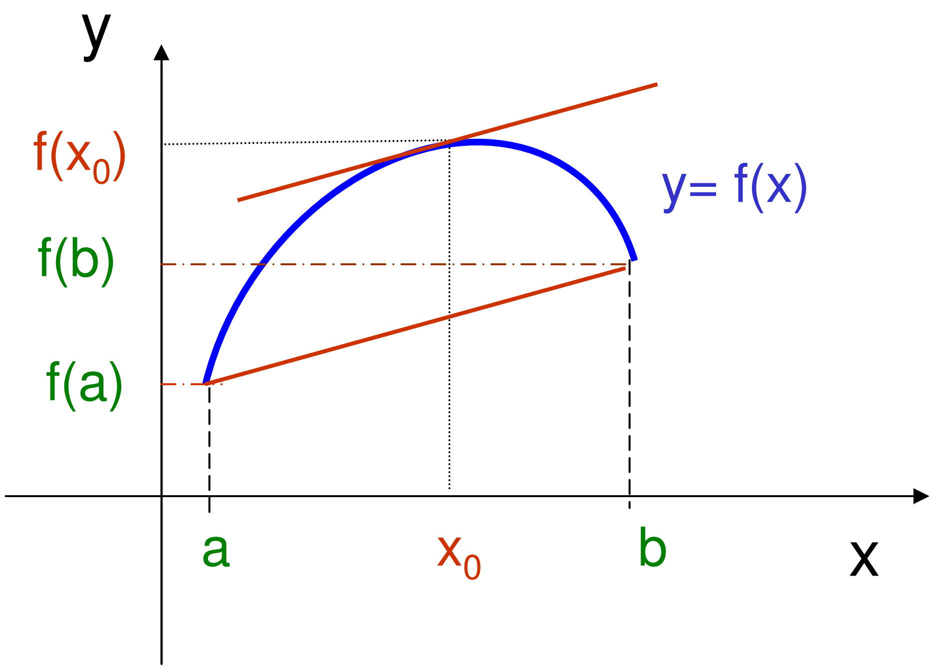
La recta tangente a la curva de ecuación y = f(x) en el punto $(x_0, f(x_0))$ es una recta horizontal

Puede haber más de un punto con tangente horizontal.



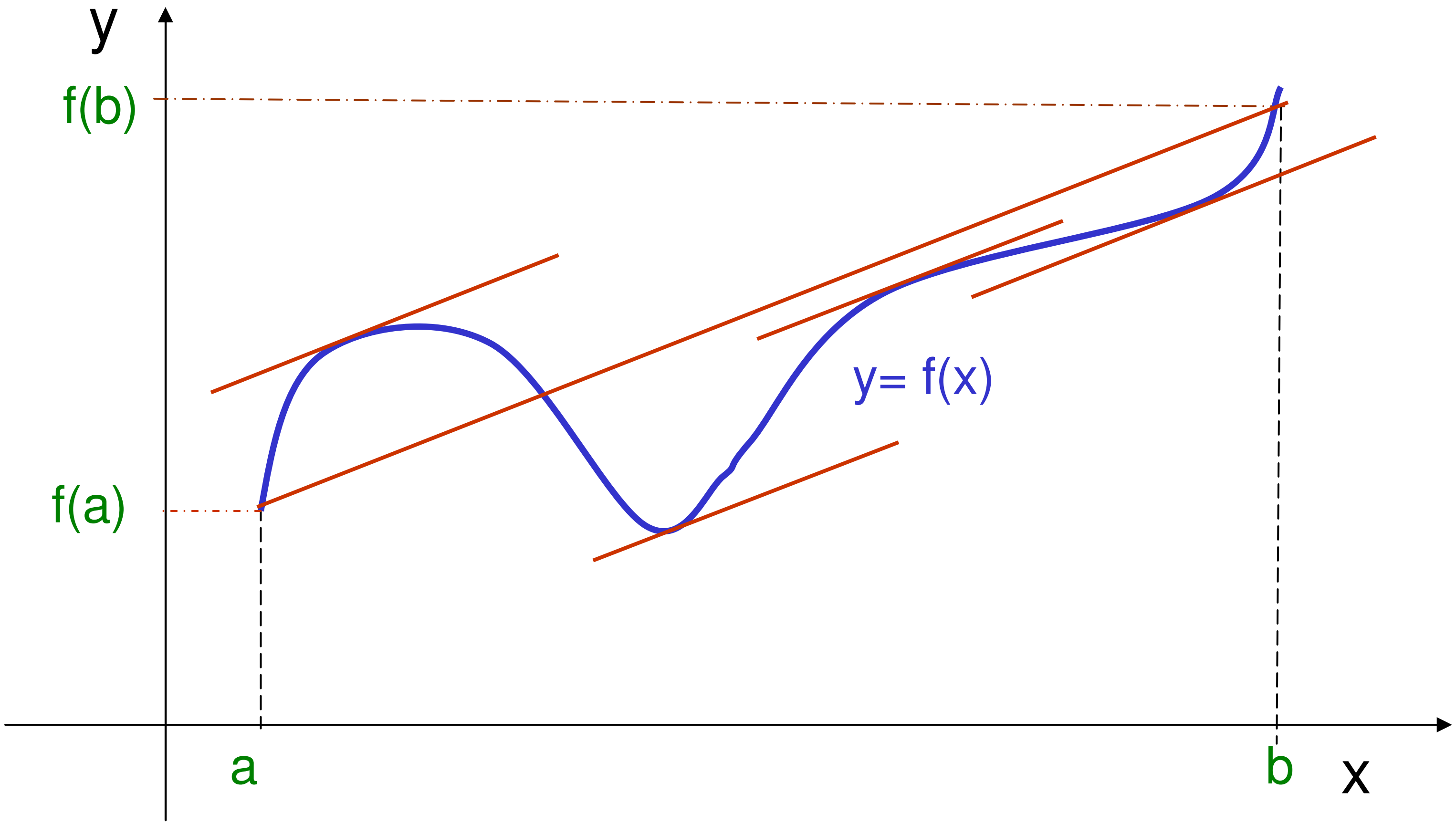
Teorema del valor medio de Lagrange

Si f es continua en [a,b]
derivable en (a,b) } entonces $\exists\, x_0 \in (a,b) \,/\, \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$



La recta tangente a la curva de ecuación y = f(x) en el punto (x_0, f(x_0)) es paralela al segmento definido por los puntos (a, f(a)) y (b, f(b))

Puede haber más de un punto que verifique el teorema.



Regla de L'Hôpital

Si * f y g son derivables en un entorno de x_0

* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ (o ∞)

* existe $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Entonces: existe $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y se cumple que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ejemplos

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos x-\cos 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{-\operatorname{sen}x+3\operatorname{sen}3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{-\cos x+9\cos 3x}=\frac{2}{-1+9}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$$

Derivada de una función compuesta

Sean $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g: D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(D_f) \subset D_g$

Si: $\begin{cases} x_0 \in int(D_f) \quad \text{y} \quad f \text{ es derivable en } x_0 \\ f(x_0) \in int(D_g) \quad \text{y} \quad g \text{ es derivable en } f(x_0) \end{cases}$

entonces:

la función compuesta **$g \circ f$ es derivable** en x_0 y

$$(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)].f'(x_0)$$

$(sen(3x^2))' = cos(3x^2)(3x^2)' = cos(3x^2)6x$

Derivada de la función inversa

Sea $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in int(D)$

Si f es derivable en un entorno E de x_0 y $f'(x_0) \neq 0$

Entonces:

$\exists\, U \wedge V \subset \mathbb{R}$ con $x_0 \in U \wedge f(x_0) \in V$ tales que

$f: U \longrightarrow V$ es inversible y su inversa f^{-1} es dervable en $f(x_0)$

y

$$\left(f^{-1}\right)'(x_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x_0)\right)} \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$$

Derivada de la función implícita

Se dice que y es función implícita de x si está definida mediante una ecuación de la forma

$$F(x,y)=0$$

En muchos casos no se puede despejar $y=f(x)$ o puede ser demasiado complicado, sin embargo, si (x_0,y_0) es un punto en el que se cumple que:

- $F(x_0,y_0)=0$
- F es continua en un entorno del punto (x_0,y_0) $\wedge \exists F'_x(x_0,y_0)$
- F'_y existe y es continua en un entorno de (x_0,y_0) siendo $F'_y(x_0,y_0) \neq 0$

Entonces,

en un entorno de (x_0,y_0) existe una función $y=f(x)$ continua y derivable tal que $F(x,f(x))=0$ y su derivada es:

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}$$

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Sea f: D $\longrightarrow \mathbb{R}$ y derivable en un entorno E de x_0

Definición

f' es **derivable** en x_0 si existe y es finito el límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}$$

$f''(x_0)$ = derivada segunda de f en x_0

Definición

Si f' es derivable en D, a la función que hace corresponder a cada punto $x \in D$ su derivada segunda $f''(x)$ se la denomina **función derivada segunda** de f en D, y se escribe: **f''**

$$\begin{aligned} f'' : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f''(x) \end{aligned}$$

Se pueden definir los conceptos de derivada tercera, derivada cuarta,....

$$\frac{d^i f}{dx^i} = \text{derivada } i - \text{ésima de } f$$

Definición

Una función **f es de clase C^n** en un conjunto abierto D si para cada punto $x \in D$ existen las derivadas f'(x), f''(x),..., $f^{(n)}(x)$, y la función derivada n-ésima $f^{(n)}$ de f en D es continua sobre D.

Otras notaciones:

$$f'(x)_{x=x_0},\ Df(x)_{x=x_0},\ \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}$$

$$f''(x)_{x=x_0},\ D^2f(x)_{x=x_0},\ \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=x_0}$$

FORMULA DE LEIBNIZ

Se utiliza para obtener la derivada de orden n del producto de dos funciones

Si f(x)=u(x).v(x) se cumple que:

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = (u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}$$

Donde $u^{(0)} = u \quad \wedge \quad v^{(0)} = v$ representan a las funciones sin derivar

Sea f definida en un entorno de x_0 y derivable en x_0

Definición

Se llama **diferencial** de f en x_0 a la aplicación lineal

$$df(x_0): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{definida por:}$$

$$h \longrightarrow df(x_0)(h)=f'(x_0).h \qquad \forall\, h \in \mathbb{R}$$

Definición

f es **diferenciable** en x_0 si existe la diferencial de f en x_0

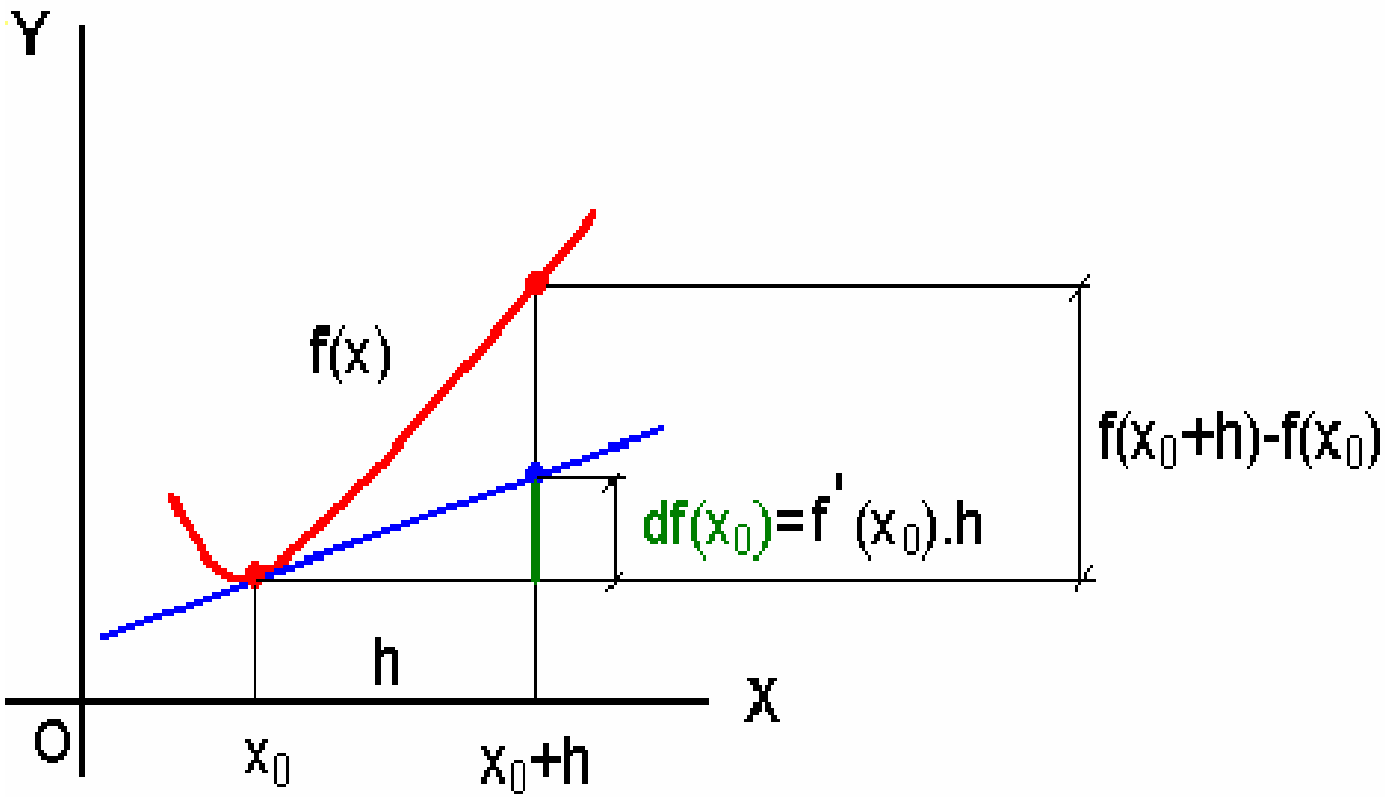
Proposición

f es diferenciable en x_0 si y sólo si f es derivable en x_0

Proposición

Si df es la diferencial de f en x_0, entonces, para h suficientemente pequeño se cumple que:

$$f(x_0+h) - f(x_0) \cong df(x_0)(h)= f'(x_0).h$$



$$h \to 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_0+h)-f(x_0) \cong df(x_0)$$

Para puntos suficientemente próximos al punto x_0 la curva de ecuación $y=f(x)$ se puede aproximar por su recta tangente en x_0

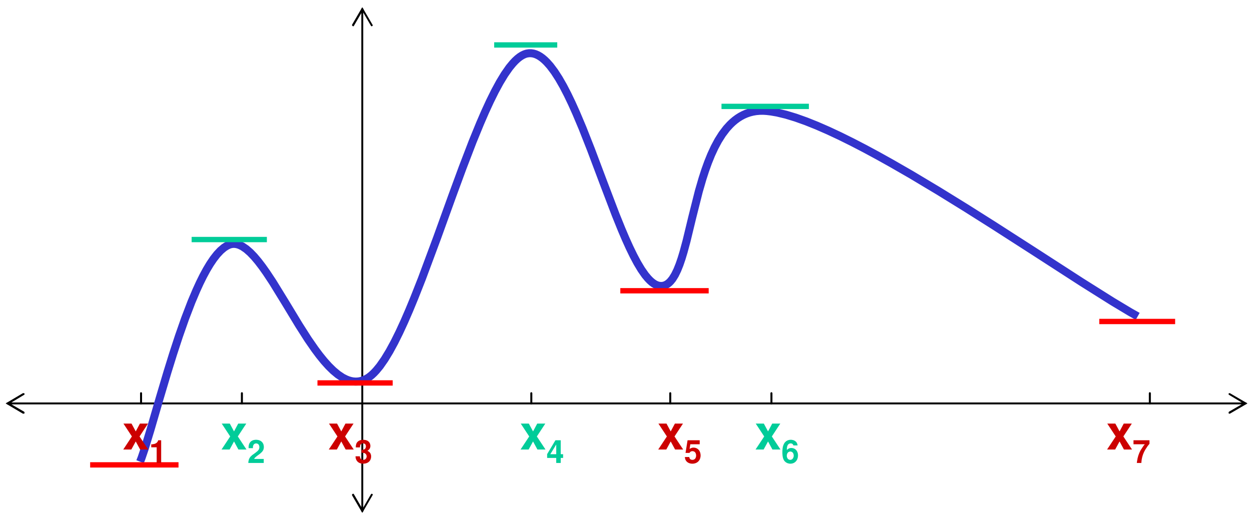
EXTREMOS

Definición

Sea una función $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$

f tiene un **máximo local** en x_0 si
$\exists r>0$ tal que $f(x) \leq f(x_0)\ \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap D$

f tiene un **mínimo local** en x_0 si
$\exists\ r>0$ tal que $f(x) \geq f(x_0)\ \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap D$



x_1, x_3, x_5, x_7 mínimos locales

x_2, x_4, x_6 máximos locales

Proposición

Si $x_0 \in D$ y f es continua en $[x_0-r, x_0+r]$ y derivable en (x_0-r, x_0+r) entonces:

* * si se cumple que :

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0 & \text{si} \quad x \in (x_0 - r, x_0) \\ f'(x) \leq 0 & \text{si} \quad x \in (x_0, x_0 + r) \end{cases}$$

la función f tiene un máximo local en x_0

* * si se cumple que

$$\begin{cases} f'(x) \leq 0 & \text{si} \quad x \in (x_0 - r, x_0) \\ f'(x) \geq 0 & \text{si} \quad x \in (x_0, x_0 + r) \end{cases}$$

la función f tiene un mínimo local en x_0

Proposición

Si:

$$\begin{cases} f \text{ tiene las n primeras derivadas continuas en } x_0 \in D \\ f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ f^{(n)}(x_0) \neq 0 \text{ siendo n par.} \end{cases}$$

Entonces:

∗ ∗ si se cumple que : $f^{(n)}(x_0) < 0$ la función tiene un máximo local en x_0

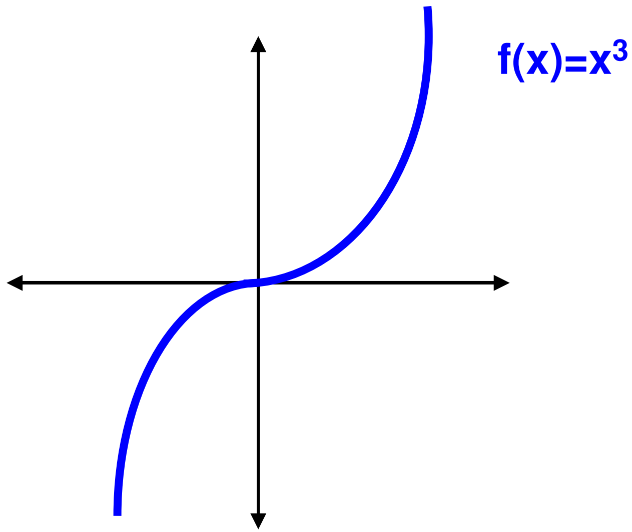
∗ ∗ si se cumple que : $f^{(n)}(x_0) > 0$ la función tiene un mínimo local en x_0

OBSERVACIONES

1º) Generalmente se cumple la proposición para **n=2,** es decir:

* Si $\mathbf{f'(x_0)=0}$ y $\mathbf{f''(x_0)<0}$ entonces f tiene un **máximo** en x_0
* Si $\mathbf{f'(x_0)=0}$ y $\mathbf{f''(x_0)>0}$ entonces f tiene un **mínimo** en x_0

2º) **$f'(x_0)=0$** es condición necesaria pero **NO** es condición suficiente para la existencia de un extremo en x_0



Para $f(x)=x^3$

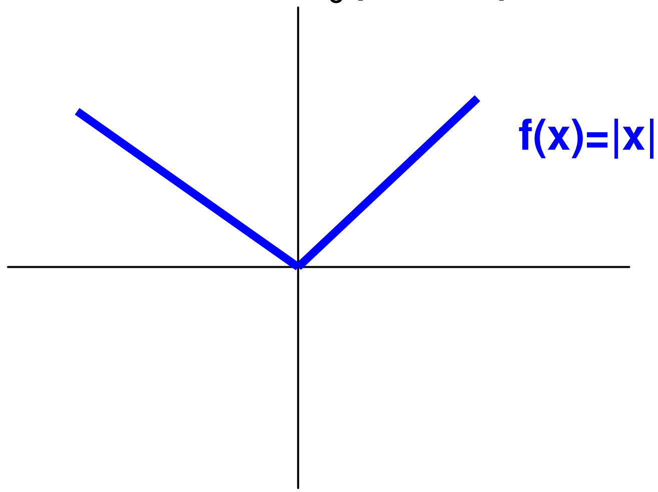
$f'(x)=3x^2 \longrightarrow \quad f'(0)=0$

Pero en $x_0=0$ no hay ni máximo ni mínimo de f

3º) Puede ocurrir que f tenga un extremo en x_0 pero que no exista $f'(x_0)$

Para $f(x)=|x|$

en $x_0=0$ f tiene un mínimo y $\nexists f'(x_0)$



Definición

Sea una función $f:D\subseteq\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ y $x_0\in D$

f tiene un **máximo absoluto** en x_0 si $f(x)\leq f(x_0)$ $\forall x\in D$

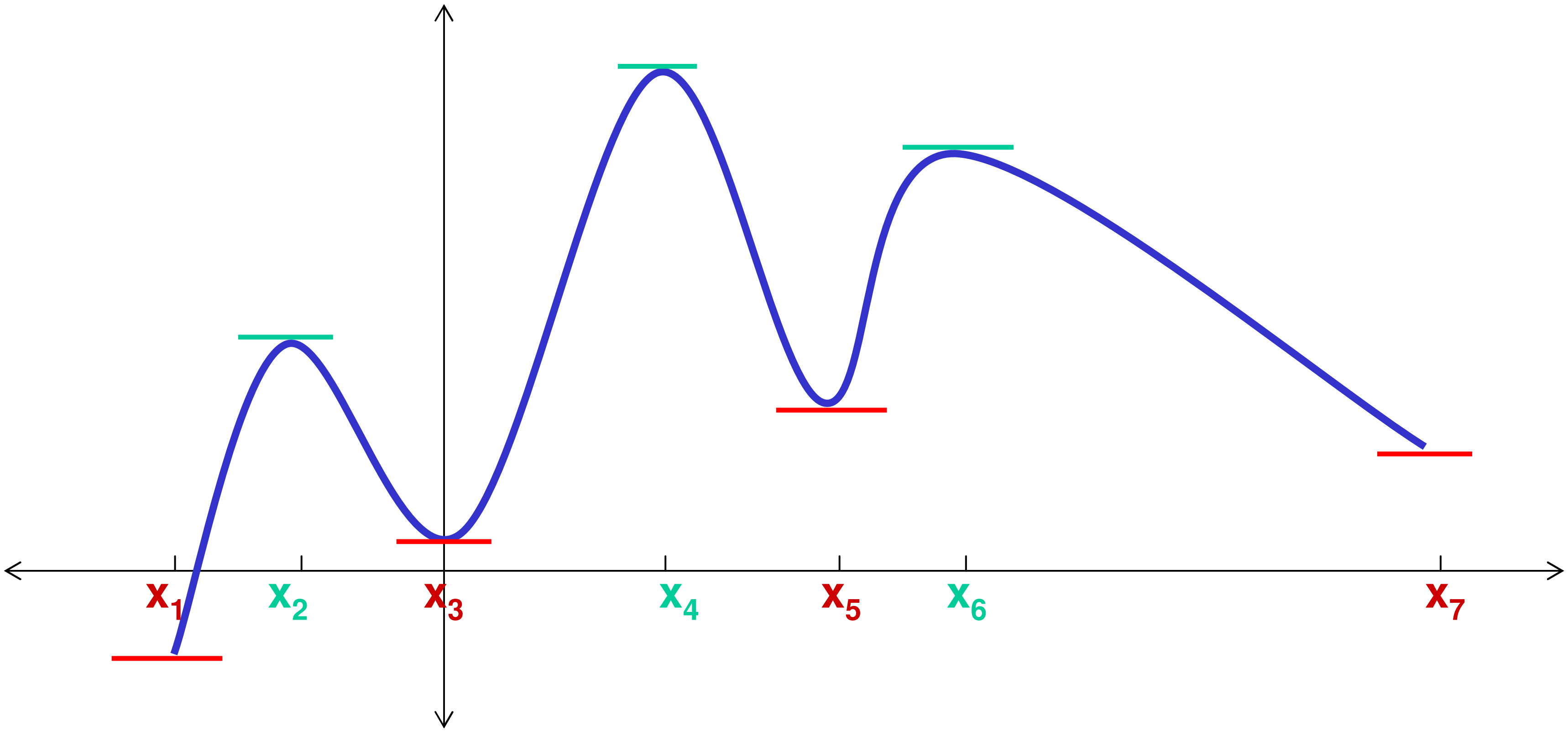
f tiene un **mínimo absoluto** en x_0 si $f(x)\geq f(x_0)$ $\forall x\in D$

Los máximos y mínimos globales se llaman **extremos globales**

Proposición

Toda función continua en un compacto alcanza un máximo absoluto y un mínimo absoluto en el compacto. Se pueden alcanzar en varios puntos.

(compacto = cerrado y acotado)



x_1, x_3, x_5, x_7 **mínimos locales**

x_2, x_4, x_6 **máximos locales**

Además, x_1 **mínimo absoluto y** x_4 **máximo absoluto**

COMO HALLAR LOS EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN CONTINUA

1) Hallar los puntos críticos: extremos del dominio

$c \,/\, f'(c) = 0 \;\vee\; \nexists\, f'(c)$

2) Estudiar los extremos del intervalo comprobando el signo de f' en su entorno

3) Examinar los puntos críticos interiores comprobando el signo de f' a ambos lados de c o el signo de f''(c)

4) Ver cuáles de los extremos obtenidos son los valores extremos absolutos

APROXIMACIÓN LOCAL DE UNA FUNCION

Proposición

Sea una función f y un intervalo (a,b) centrado en x_0

Si f es de clase C^{n+1} en (a,b) se verifica:

$$f(x)=P_n(x)+R_{n+1}(x) \qquad \forall\, x \in (a,b)$$

donde:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad \text{con } c\in (x_0,x) \text{ ó } c\in (x\ ,x_0)$$

Definición

El desarrollo anterior se llama **Fórmula de Taylor**

$\mathbf{P_n}$ $\longrightarrow$ **Polinomio de Taylor** de f, de orden n en x_0

$\mathbf{R_{n+1}}$ $\longrightarrow$ **Resto** del desarrollo

Formula de Mac-Laurin

Cuando en la fórmula de Taylor hacemos **$x_0=0$**

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Observación

$P_n(x)$ es el único polinomio de grado menor o igual que n que verifica:

$P_n(x_0)=f(x_0)$, $P'_n(x_0)=f'(x_0)$, ..., $P^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$