NÚMEROS COMPLEJOS

- Números reales
- Intervalos
- El conjunto R^2
- Discos
- Números complejos
- Teorema fundamental del Álgebra

NÚMEROS REALES

Números naturales, enteros racionales e irracionales

En matemáticas son importantes los conjuntos:

$\mathbb{N}$ Conjunto de los números **naturales**

$\mathbb{Z}$ Conjunto de los números **enteros**

$\mathbb{Q}$ Conjunto de los números **racionales**

$\mathbb{R}$ Conjunto de los números **reales**

El complementario de $\mathbb{Q}$ respecto de $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números **irracionales**

Se cumple que: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ es un **cuerpo conmutativo totalmente ordenado** para las operaciones usuales suma ($+$) y producto (**.**) y la relación binaria ($\leq$)

Propiedad

Dados dos números reales x e y existe al menos un número racional r tal que $x < r < y$

Es decir, los números irracionales se pueden aproximar por números racionales tanto como queramos.

También se dice que $\mathbb{Q}$ **es denso en** $\mathbb{R}$

Números algebraicos y números trascendentes

Un número real **x** es **algebraico** si es solución de una ecuación algebraica con coeficientes enteros

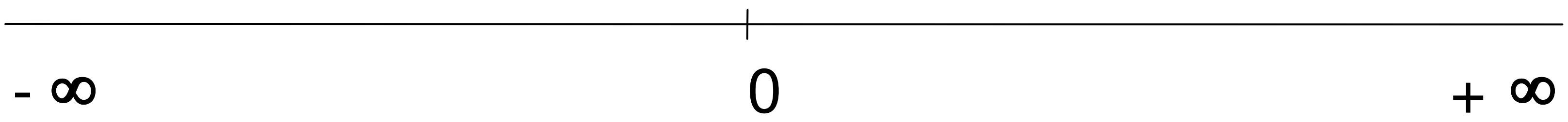
$\sqrt{2}$ es algebraico porque es la solución de la ecuación $x^2-2=0$

Los números reales que no son algebraicos son **trascendentes**

e y π son trascendentes

Recta o eje real

Cada elemento del conjunto $\mathbb{R}$ está representado por un único punto en la denominada **recta real**



INTERVALOS

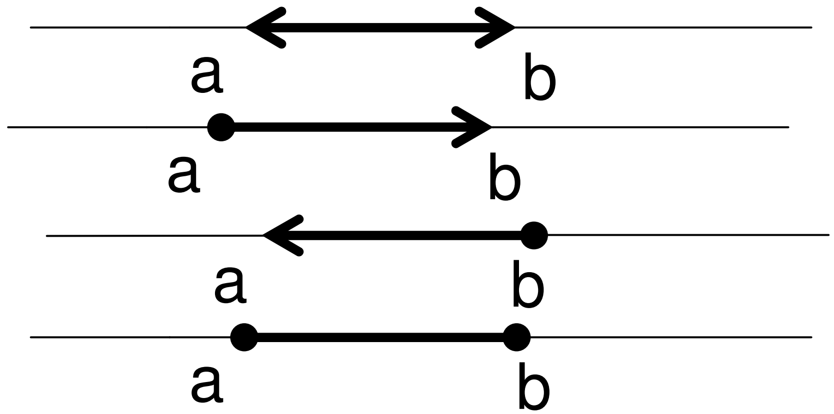
Intervalos acotados

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x < b\}$

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x \leq b\}$

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\}$



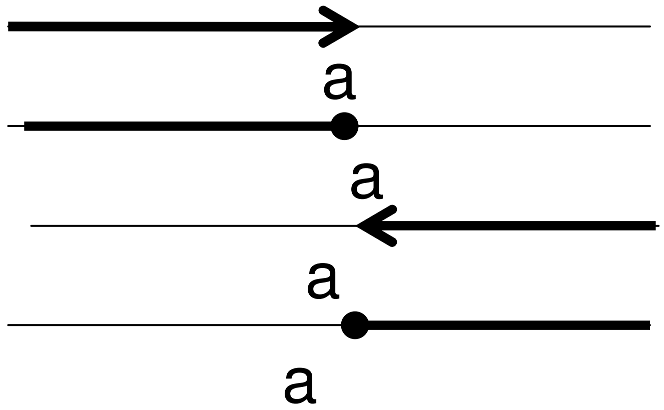
Intervalos no acotados

$(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < a\}$

$(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq a\}$

$(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > a\}$

$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq a\}$



ENTORNOS

Intervalo abierto centrado en a y de radio r >0

$(a-r,a+r) = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, a-r < x < a+r \} = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, |x-a|<r \}$

Intervalo cerrado centrado en a y de radio r >0

$[a-r,a+r] = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, a-r \le x \le a+r \} = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, |x-a| \le r \}$

Definición

El conjunto **E es un entorno de x** si contiene algún intervalo abierto centrado en x

EL CONJUNTO $\mathbb{R}^n$

Son conocidos los conjuntos

$\mathbb{R}^2=\{ (x,y) \;/\; x,y \in \mathbb{R}\}$ formado por **pares** ordenados de números reales

$\mathbb{R}^3=\{ (x,y,z) \;/\; x,y,z \in \mathbb{R}\}$ formado por **ternas** ordenadas de números reales

generalizando definimos

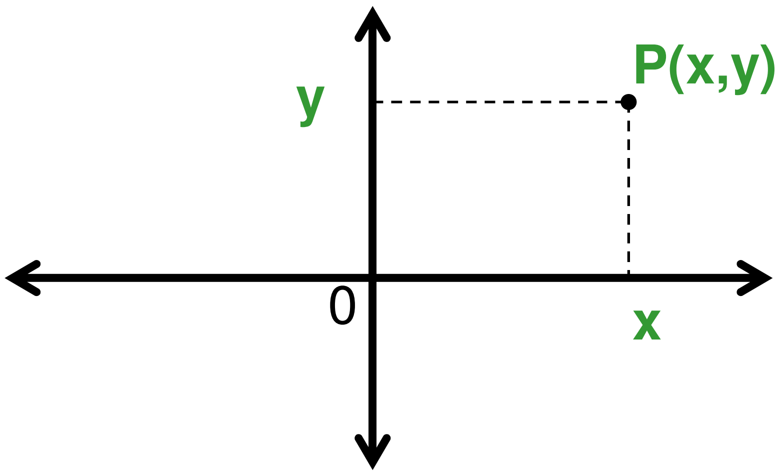
$\mathbb{R}^n=\{ (x_1,x_2,\dots,x_n) \;/\; x_1,x_2,\dots,x_n \in \mathbb{R}\}$ formado por **n-uplas** ordenadas de números reales

El plano real

Cada elemento de $\mathbb{R}^2$ se representa

por un punto en el llamado

plano real



DISCOS

Disco abierto de centro el punto $\bar{a} = (a_1, a_2)$ de $\mathbb{R}^2$ y radio r>0

$$D(\bar{a}, r) = \left\{ (x, y) \in R^2 / (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 < r^2 \right\}$$

Disco cerrado de centro el punto $\bar{a} = (a_1, a_2)$ de $\mathbb{R}^2$ y radio r>0

$$\bar{D}(\bar{a}, r) = \left\{ (x, y) \in R^2 / (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 \leq r^2 \right\}$$

Definición

Se llama **entorno** de un punto $\bar{a} = (a_1, a_2)$ de $\mathbb{R}^2$ a cualquier subconjunto E de $\mathbb{R}^2$ que contenga un disco abierto $D(\bar{a}, r)$

NÚMEROS COMPLEJOS

Definición

La ecuación $x^2+4 = 0$ no tiene soluciones reales pues no hay ningún número real tal que $x^2 = - 4$.

Para resolver estas ecuaciones definimos **la unidad imaginaria** $i = \sqrt{-1}$

Definición

Definimos el **conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos** como: $\mathbb{C} = \{a+bi \;/\; a,b \in \mathbb{R}\}$ donde $i = \sqrt{-1}$

Al resolver ahora la ecuación queda:

$$x = \pm\sqrt{-4} = \pm\sqrt{-1}\sqrt{4} = \pm 2i$$

De esta manera las soluciones serían:

x = 2i y **x = -2i** en $\mathbb{C}$

Se cumple que: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Definición

Dado un número complejo z = a+bi los números reales a y b se llaman **parte real** y **parte imaginaria** de z

Se escribe: **a = Re(z), b = Im(z)**

Definición

Se llama **complejo conjugado** del número complejo

z = a+bi, al número complejo $\bar{z} = a - bi$

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

Suma:

(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i

(1+5i)+(3+2i)=4+7i

Resta:

(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i

(1+5i)-(3+2i)=-2+3i

Multiplicación:

(a+bi).(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i

(1+5i).(3+2i)= 3+2i+15i+10i^2 =
3+17i+10(-1)= -7+17i

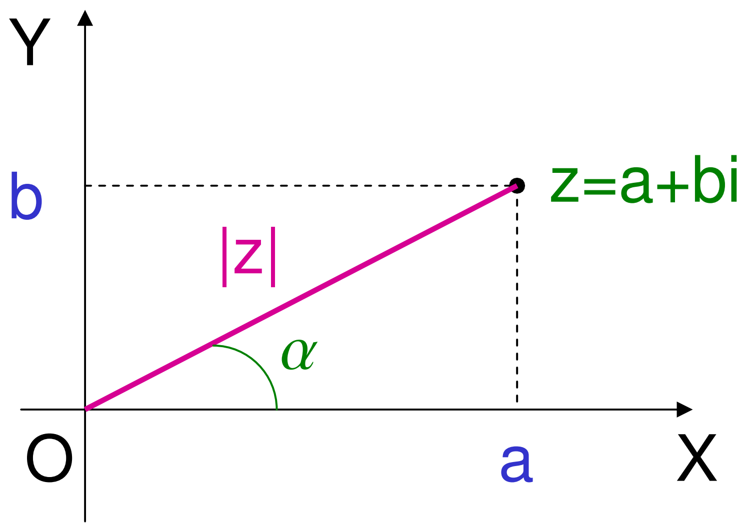
División:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

$$\frac{1+5i}{3+2i}=\frac{(1+5i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{3-2i+15i-10i^2}{3^2-(2i)^2}=$$

$$\frac{3+13i+10}{9+4}=\frac{13+13i}{13}=1+i$$

Representación gráfica



Correspondencia biunívoca

$\mathbb{C} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$

z=a+bi $\longleftrightarrow$ **P(a,b)**

Definición

Dado z = a+bi definimos:

Módulo de z: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Argumento de z: es el ángulo $\alpha \in (-\pi,\pi]$ / $\alpha = \text{arctg}\dfrac{b}{a}$

Además: $a=|z|\cos\alpha$
$b=|z|\,\text{sen}\,\alpha$

Formas de expresar un número complejo

Si z = a+bi

forma **binómica**: **z = a+bi**

forma **cartesiana: z= (a,b)**

forma **polar**: $\mathbf{z = (\rho, \alpha)}$ o $\mathbf{z = \rho_\alpha}$ $\longrightarrow$ coordenadas polares

forma **trigonométrica**: $\mathbf{z = \rho (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)}$ del punto P

siendo $\rho = |z|$ y α = argumento de z

Además, para operar en forma polar:

si $\mathbf{z_1 = (\rho_1, \alpha_1)}$ y $\mathbf{z_2 = (\rho_2, \alpha_2)}$ entonces:

$\mathbf{z_1 . z_2 = (\rho_1 \rho_2, \alpha_1 + \alpha_2)}$ y $\dfrac{z_1}{z_2} = \left(\dfrac{\rho_1}{\rho_2}, \alpha_1 - \alpha_2 \right)$ si $z_2 \neq 0$

Es importante saber expresar un número complejo de todas las formas

Potencias y raíces de números complejos

Sea $z = \rho\,(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$ y $n \in N$

1º) $z^n = \rho^n\,(\cos n\alpha + i\,\mathrm{sen}\,n\alpha)$

2º) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\ \mathrm{sen}\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$ k= 0,1,2,... ,n-1

en forma polar es:

$$z = (\rho, \alpha)$$

$$z^n = (\rho^n, n\alpha)$$

$$\sqrt[n]{z} = \left(\sqrt[n]{\rho}, \frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$$ para K=0, 1, 2,..., n-1

Fórmula de Moivre

Sea $z = \rho\,(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ y $n \in \mathbb{N}$

Se cumple que:

$$z^n = \rho^n\,(\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha) = \rho^n\,(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^n$$

Si consideramos $\rho=1$ se obtiene la fórmula de Moivre:

$$(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^n = \cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha$$

Exponencial de un número complejo

Definición

Dado el número trascendente e = 2.71828... definimos $e^{i\varphi}$ como

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\varphi \longrightarrow$$ **Fórmula de Euler**

entonces, para un número complejo z = a+bi la exponencial e^z resulta:

$$e^z = e^a\, e^{ib} = e^a\,(\cos b + i\,\mathrm{sen}\, b)$$

y teniendo en cuenta su forma polar, todo número complejo

$z = \rho\,(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$ se puede poner $z = \rho\, e^{i\alpha}$

Además,

Si $z = \rho\, e^{i\alpha}$ y $n \in N$ entonces:

1º) $z^n = \rho^n e^{i n \alpha}$

2º) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\; e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{n}}$ k= 0,1,2,... ,n-1

Logaritmos de números complejos

Un número complejo u es un **logaritmo neperiano** de un número complejo no nulo z si se cumple que $e^u = z$

$$u = \ln z \Leftrightarrow e^u = z$$

Poniendo $z = (\rho, \alpha)$ se tiene:

$$\ln z = \ln \rho + i\,(\alpha + 2k\pi) \quad \text{con } k \in Z$$

logaritmo principal de z: $\ln z = \ln \rho + i\,\alpha$ (k=0)

siendo α el argumento principal de z

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Definición

Dado un polinomio $\mathbf{p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}$ de grado n en la variable x y con coeficientes reales o complejos.

$p(x)=0$ se llama **ecuación algebraica** o polinomial de grado n

Las soluciones de la ecuación $p(x) = 0$ se llaman **raíces** del polinomio $p(x)$

Teorema

Toda ecuación algebraica $p(x)=0$ de grado n con coeficientes en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ tiene n soluciones en $\mathbb{C}$.

Además, *si todos los coeficientes son reales*, y $z = a+bi$ es solución de $p(x)=0$, también lo es $\bar{z} = a - bi$

Propiedades

• Si $x_1, x_2, \ldots, x_p$ son las soluciones distintas de $p(x)=0$ y $m_1, m_2, \ldots, m_p$ sus órdenes de multiplicidad, entonces el polinomio p(x) se puede factorizar en la forma:

$$p(x) = a_n (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_p)^{m_p}$$

• Si los coeficientes de la ecuación algebraica $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ son números enteros con $a_0 \neq 0$, entonces, **sus soluciones enteras** hay que buscarlas entre los divisores de a_0

• Si los coeficientes de la ecuación algebraica $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ son números enteros con $a_0 \neq 0$, entonces, sus **soluciones racionales** tienen como numerador un divisor de a_0 y como denominador un divisor de a_n.