APLICACIONES GEOMÉTRICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

[8.1] Calcular el área del dominio plano definido en el primer cuadrante por:

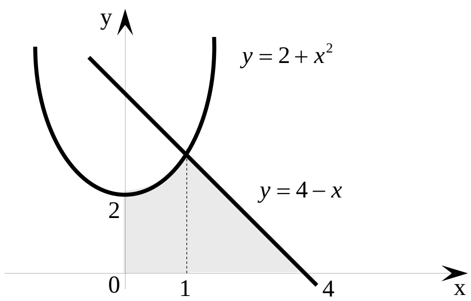
$$\begin{cases} y \le 2 + x^2 \\ y \le 4 - x \end{cases}$$

Solución

Determinemos los puntos de corte entre la parábola $y = x^2 + 2$ y la recta $y = 4 - x$:

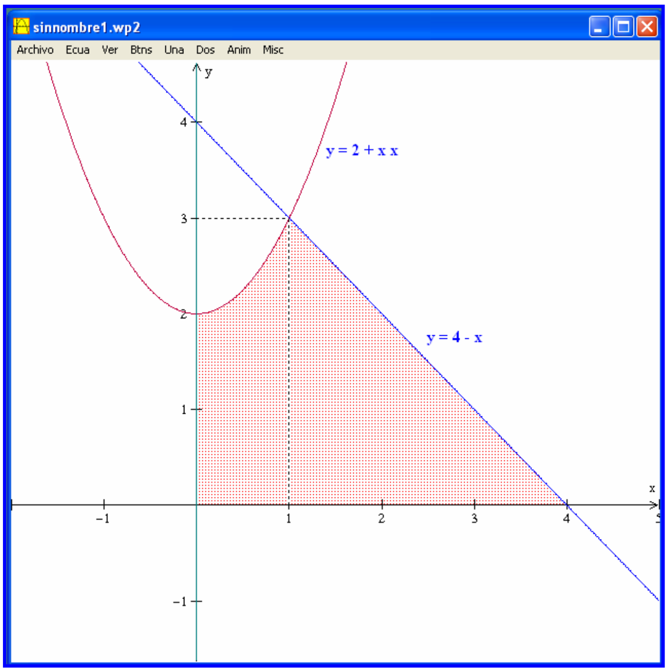
$$\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = 4 - x \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 + 2 = 4 - x \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \ (\notin 1^{\text{o}} \text{ Cuadrante}) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P(1,3)$$



$$A = \int_0^1 (x^2 + 2)\, dx + \int_1^4 (4 - x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x \right]_0^1 + \left[4x - \frac{x^2}{2} \right]_1^4 =$$

$$= \left(\frac{1}{3} + 2 \right) + \left((16 - 8) - \left(4 - \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{7}{3} + \frac{9}{2} = \frac{41}{6} \quad u^2$$



Input: Mathematica form

$$\int_0^1 (x^2+2)\,dx + \int_1^4 (4-x)\,dx$$

Result: More digits

$$\frac{41}{6} \approx 6.83333\ldots$$

[8.2] Mediante integración, evaluar la superficie determinada por:

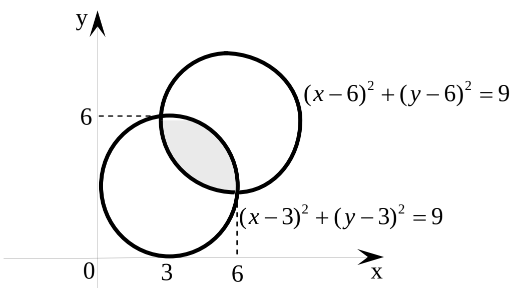
$$x^2+y^2-6x-6y+9\le 0 \quad ; \quad x^2+y^2-12x-12y+63\le 0$$

Solución

La superficie se corresponde con la intersectada por dos circunferencias:

$$(x-3)^2+(y-3)^2=9 \qquad ; \qquad (x-6)^2+(y-6)^2=9$$

Resolviendo el sistema se obtienen los puntos de corte: $(3,6)$ y $(6,3)$

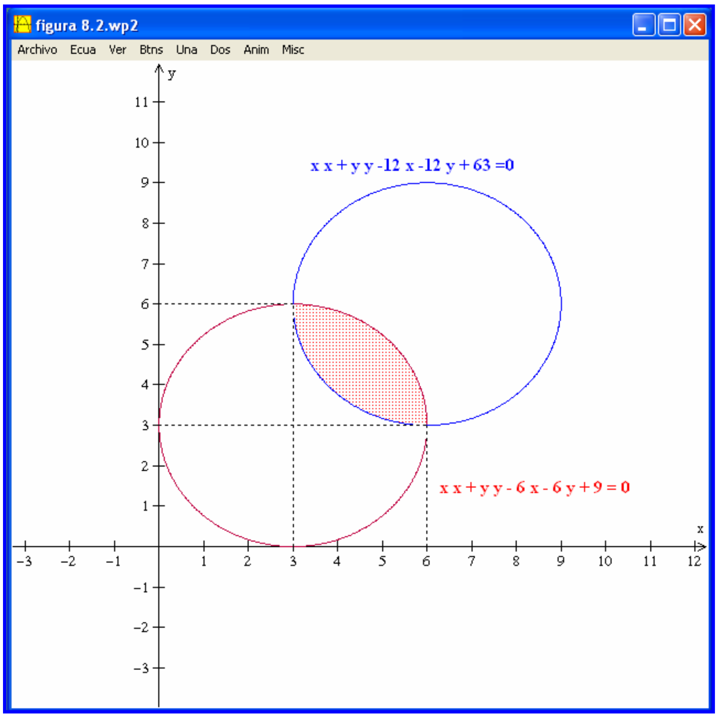


$$A=\int_3^6\left[3+\sqrt{9-(x-3)^2}-6+\sqrt{9-(x-6)^2}\right]dx=$$

$$=\int_3^6\left[\sqrt{9-(x-3)^2}+\sqrt{9-(x-6)^2}-3\right]dx=(\text{mediante tablas})=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left((x-3)\sqrt{9-(x-3)^2}+(x-6)\sqrt{9-(x-6)^2}+9\,\text{arcsen}\,\frac{x-3}{3}+9\,\text{arcsen}\,\frac{x-6}{3}\right)-3x\right]_3^6=$$

$$=\frac{9}{2}\text{arcsen}(1)-18-\frac{9}{2}\text{arcsen}(-1)+9=9\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\quad u^2$$



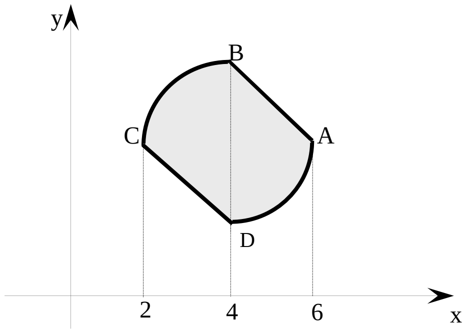
Definite integral: More digits

$$\int_3^6\left(3+\sqrt{9-(x-3)^2}-\left(6-\sqrt{9-(x-6)^2}\right)\right)dx\approx 5.13717$$

[8.3] Sean los puntos A(6,4), B(4,6), C(2,4) y D(4,2). Calcular <u>mediante integración definida</u> la superficie plana limitada por:

1. Segmento de la recta $\overline{AB}$
2. Cuadrante $\overset{\frown}{BC}$ de la circunferencia centrada en (4,4) y de radio 2
3. Segmento de la recta $\overline{CD}$
4. Cuadrante $\overset{\frown}{DA}$ de la circunferencia citada anteriormente

Solución



a) <u>INTEGRACIÓN SIN TRASLACIÓN DE EJES</u>

Por simetría: $A = 2\int_2^4 (y_c - y_r)\,dx$

La ecuación de la circunferencia es: $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 4$

$$(y-4)^2 = 4-(x-4)^2 \quad \Rightarrow \quad y = 4 \pm \sqrt{4-(x-4)^2} \quad \Rightarrow \quad y_c = 4+\sqrt{4-(x-4)^2}$$

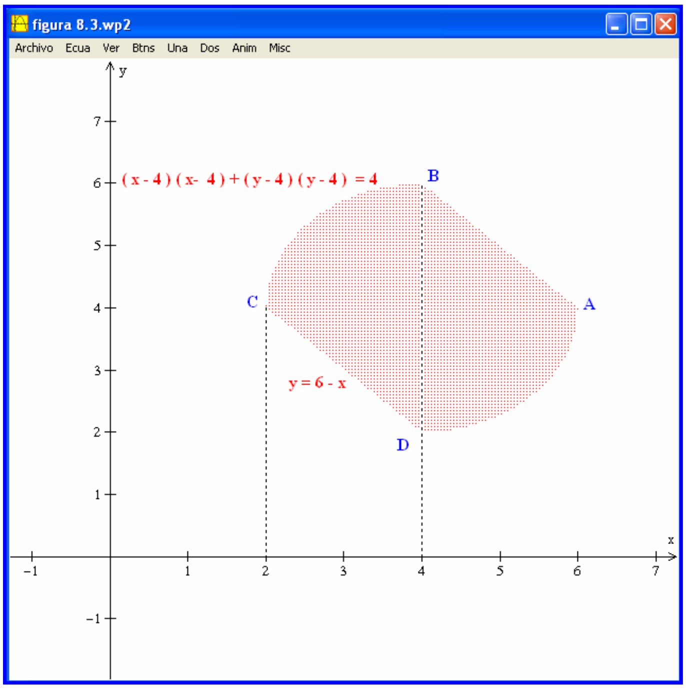
La ecuación de la recta $\overline{CD}$ es: $\dfrac{y-4}{2-4} = \dfrac{x-2}{4-2} \quad \Rightarrow \quad y-4 = -x+2 \quad \Rightarrow \quad y_r = 6-x$

Por consiguiente, el área pedida valdrá:

$$A = 2\int_2^4 (y_c - y_r)\,dx = 2\int_2^4 \left(4+\sqrt{4-(x-4)^2}+x-6\right)dx = 2\int_2^4 \left(\sqrt{4-(x-4)^2}+x-2\right)dx =$$

$$= 2\left[\frac{x-4}{2}\cdot\sqrt{4-(x-4)^2} + \frac{4}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-4}{2}\right) + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^4 =$$

$$= 2\left[(0+2\operatorname{arcsen}0+8-8)-(0+2\operatorname{arcsen}(-1)+2-4)\right] = 2\left[2-2(-\pi/2)\right] = 2(2+\pi) \quad u^2$$



Input: Mathematica form

$$2\int_2^4\left(4+\sqrt{4-(x-4)^2}-(6-x)\right)dx$$

Result: More digits

$$2(2+\pi)\approx 10.2832\ldots$$

b) INTEGRACIÓN CON TRASLACIÓN DE EJES AL ORIGEN

Por simetría: $A=2\int_{-2}^{0}(y_c-y_r)\,dx$

La ecuación de la circunferencia es: $x^2+y^2=4 \quad\Rightarrow\quad y_c=\sqrt{4-x^2}$

La ecuación de la recta $\overline{C'D'}$ es: $\dfrac{y-0}{-2-0}=\dfrac{x+2}{0+2} \quad\Rightarrow\quad y_r=-x-2$

Por consiguiente, el área pedida valdrá:

$$A=2\int_{-2}^{0}(y_c-y_r)\,dx=2\int_{-2}^{0}\left(\sqrt{4-x^2}+x+2\right)dx=2\left[\frac{x}{2}\cdot\sqrt{4-x^2}+\frac{4}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{0}=$$

$$=2\left[(0+2arc\operatorname{sen}0+0+0)-(0+2arc\operatorname{sen}(-1)+2-4)\right]=2\left[2-2(-\pi/2)\right]=2(2+\pi)\quad u^2$$

---

c) POR GEOMETRÍA ELEMENTAL (no permitido por el enunciado).

$$A=2\left[\text{cuadrante(O´BC)} + \text{triangulo(O´CD}\right]=2\left[\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\right]=2(2+\pi)\quad u^2$$

[8.4] Calcular mediante integrales el área limitada en el semiplano $y\geq 0$ por las líneas

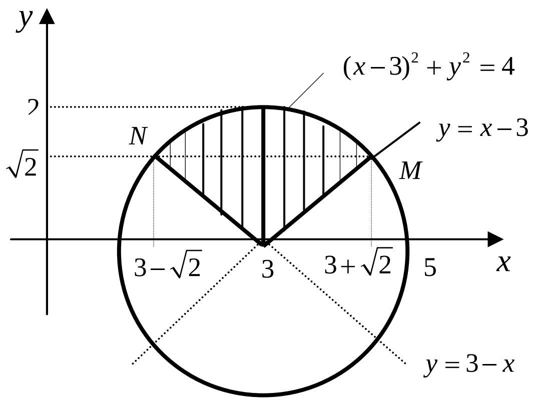
$$x^2+y^2-6x+5=0;\quad x-y-3=0;\quad x+y-3=0$$

Solución

La primera línea es una circunferencia con centro en $(3,0)$ y radio 2: $(x-3)^2+y^2=4$

Se corta con las rectas en el semiplano $y\geq 0$ según los puntos:

$$\begin{cases} x^2+y^2-6x+5=0 \\ x-y-3=0 \end{cases} \rightarrow M\left(3+\sqrt{2},\sqrt{2}\right); \quad \begin{cases} x^2+y^2-6x+5=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \rightarrow N\left(3-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$$



Debido a la simetría del área: $$A=2\int_3^{3+\sqrt{2}}\left[\sqrt{4-(x-3)^2}-x+3\right]dx$$

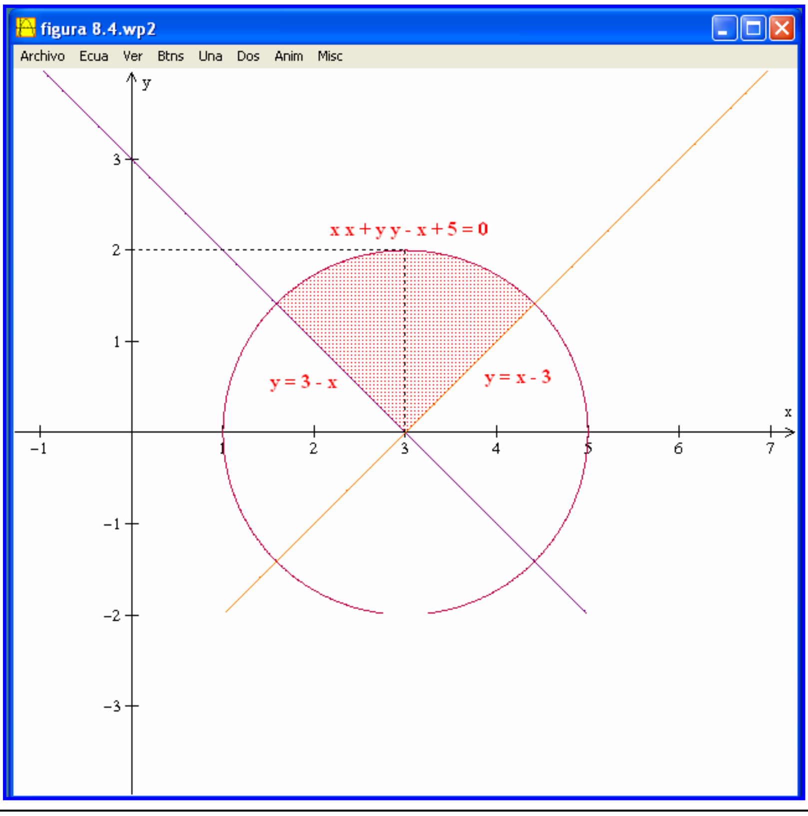
Para resolver la integral irracional se hace:

$$I=\int_3^{3+\sqrt{2}}\sqrt{4-(x-3)^2}\,dx=\left|\begin{matrix} x-3=2\operatorname{sen}t\rightarrow dx=2\cos t\,dt \\ x=3\rightarrow t=0;\ x=3+\sqrt{2}\rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}\end{matrix}\right|\equiv\int_0^{\pi/4}4\cos^2 t\,dt=\frac{\pi+2}{2}$$

Se obtiene para el área:

$$A=\pi+2+2\int_3^{3+\sqrt{2}}(-x+3)\,dx=\pi+2-2=\pi \quad u^2$$

valor que coincide con el área del cuadrante de un círculo de radio 2.



Input: Mathematica form

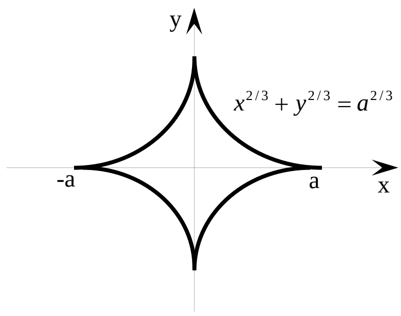
$$2\int_{3}^{3+\sqrt{2}}\left(\sqrt{4-(x-3)^2}-(x-3)\right)dx$$

Decimal approximation: More digits

3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749...

[8.5] Determinar la longitud de la curva: $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ (astroide).

Solución



Fórmula de la longitud de un arco de curva: $L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$

En nuestro caso: $y=(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2} \Rightarrow y'=\dfrac{3}{2}(a^{2/3}-x^{2/3})^{1/2}\left(-\dfrac{2}{3}x^{-1/3}\right)$

$$y'^2=(a^{2/3}-x^{2/3})\,x^{-2/3}=a^{2/3}\,x^{-2/3}-1 \Rightarrow \sqrt{1+y'^2}=a^{1/3}\,x^{-1/3}$$

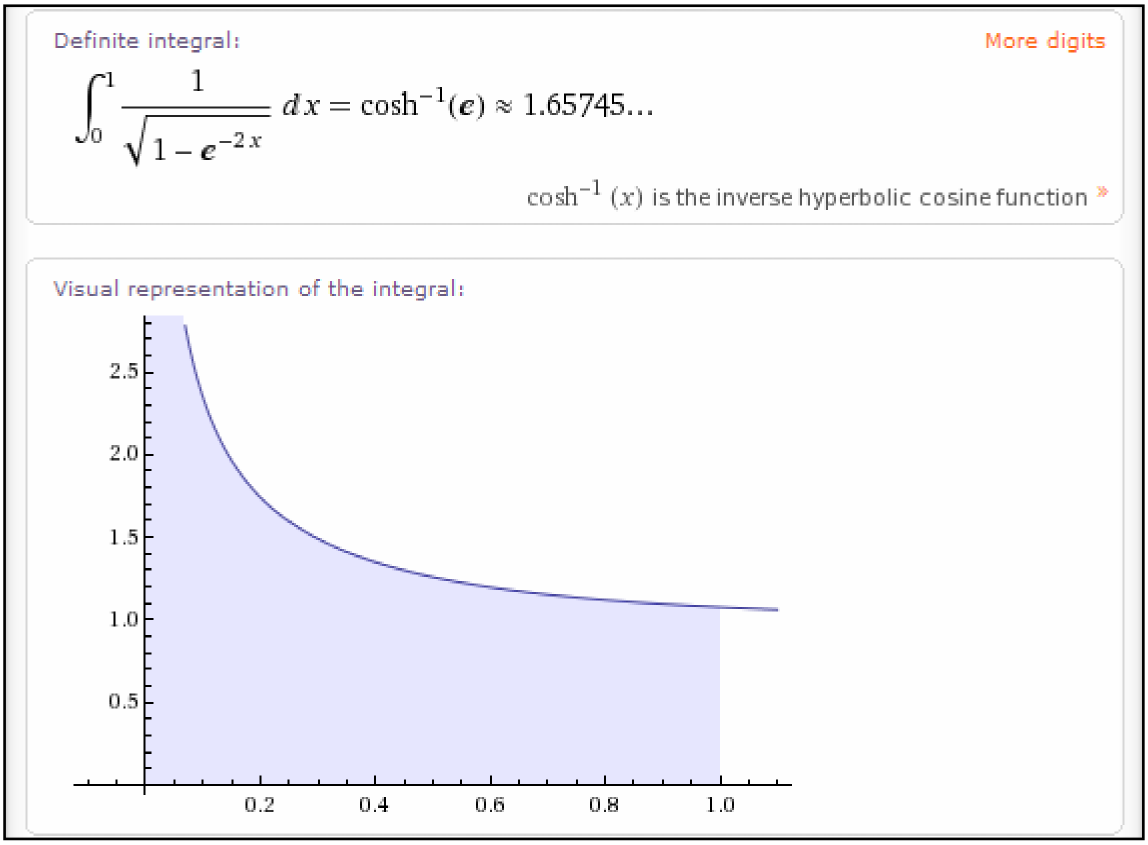
Por simetría: $L=4\int_0^a\sqrt{1+y'^2}\,dx=4\int_0^a a^{1/3}\,x^{-1/3}\,dx=6a^{1/3}\left[x^{2/3}\right]_0^a=6a\quad u$

[8.6] Hallar la longitud del arco de curva $y=\operatorname{arcsen}(e^{-x})$ desde $x=0$ hasta $x=1$

Solución

$$L=\int_0^1\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\frac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}}}\,dx=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}}=\left\{\begin{array}{lll} e^x=t & \Rightarrow & dx=\dfrac{dt}{t} \\ x=0 & \Rightarrow & t=1 \\ x=1 & \Rightarrow & t=e \end{array}\right\}=$$

$$= \int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{1-t^{-2}}} = \int_1^e \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \left[\ln\left| t+\sqrt{t^2-1} \right| \right]_1^e = \ln\left(e+\sqrt{e^2-1} \right) \quad u$$



[8.7] Probar que $L = \int_0^3 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$ representa la longitud del lazo $9y^2 = x(x-3)^2$.

Calcular L.

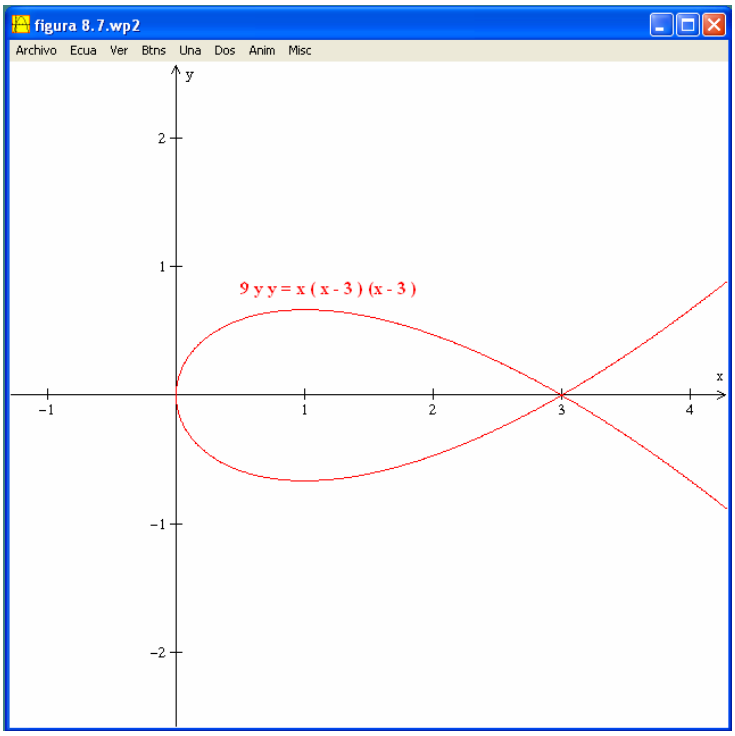
Solución

Efectivamente así es, puesto que la longitud, L, del lazo sería:

$$\mathrm{L} = \int_0^3 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{1+\left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{\frac{x^2+2x+1}{4x}}\,dx = \int_0^3 \frac{x+1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

Cálculo de la longitud:

$$L = \int_0^3 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^3 (\sqrt{x}+x^{-1/2})\,dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} \right]_0^3 = \left[\frac{2}{3}3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 0 \right] = 4\sqrt{3} \quad u$$



Definite integral: More digits

$$\int_0^3 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = 4\sqrt{3} \approx 6.9282\ldots$$

[8.8] El área que limitan en el cuadrante positivo $(x \geq 0,\ y \geq 0)$ las líneas:

$$x^2 + y^2 - 4y = 0; \quad x^2 + y^2 - 16 = 0; \quad y = 0; \quad y = 2$$

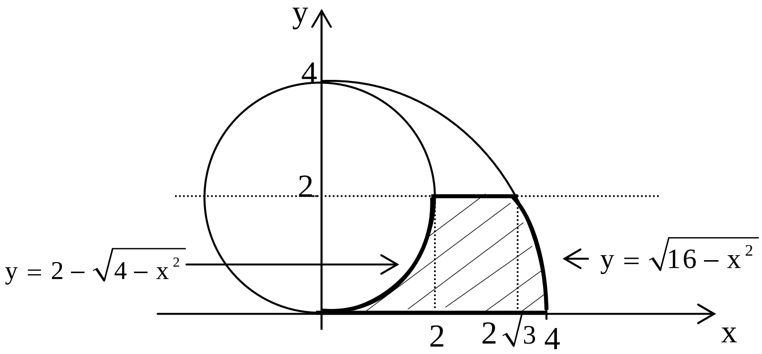
gira alrededor del eje OX. Determinar el volumen del cuerpo generado.

Solución

Área de giro

$x^2 + y^2 - 4y = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + (y-2)^2 = 4$ Circunferencia con centro en (0,2) y radio 2

$x^2 + y^2 - 16 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = 16$ Circunferencia con centro en (0,0) y radio 4



Atendiendo al gráfico, para calcular el volumen de revolución se precisan tres integrales

$$V = \pi\int_a^b y^2dx = \pi\int_0^2\left(2-\sqrt{4-x^2}\right)^2dx + \pi\int_2^{2\sqrt{3}} 2^2dx + \pi\int_{2\sqrt{3}}^4\left(16-x^2\right)dx = V_1+V_2+V_3$$

Los volúmenes parciales resultan:

$$V_1 = \pi\int_0^2\left(4+4-x^2-4\sqrt{4-x^2}\right)dx = \pi\left|8x-\frac{x^3}{3}\right|_0^2 - 4\pi\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{40\pi}{3}-4\pi^2$$

$$V_2 = \pi\int_2^{2\sqrt{3}} 2^2dx = 4\pi\left|x\right|_2^{2\sqrt{3}} = 8\pi(\sqrt{3}-1)$$

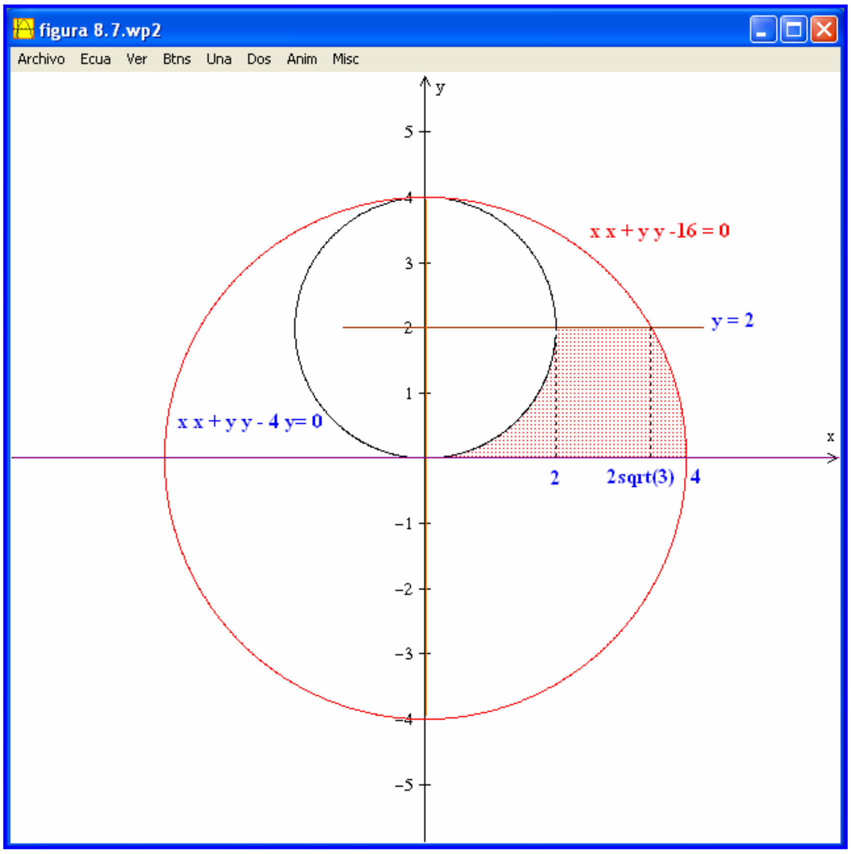
$$V_3 = \pi\int_{2\sqrt{3}}^4\left(16-x^2\right)dx = \pi\left|16x-\frac{x^3}{3}\right|_{2\sqrt{3}}^4 = \frac{8(16-9\sqrt{3})\pi}{3}$$

$$V = V_1+V_2+V_3 = \frac{40\pi}{3}-4\pi^2+8\pi(\sqrt{3}-1)+\frac{8(16-9\sqrt{3})\pi}{3} = 4\pi\left(12-4\sqrt{3}-\pi\right)$$

$$V = 4\pi\left(12-4\sqrt{3}-\pi\right)\quad u^3$$

Nota:

$$\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx \equiv \left|\begin{array}{l} x=2\operatorname{sen}t \rightarrow dx = 2\cos t\,dt \\ x=0\rightarrow t=0;\ x=2\rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right| \equiv 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt = \pi$$

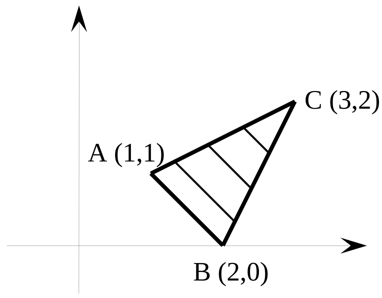


[8.9] Hallar el volumen engendrado por el triángulo de vértices $(1,1), (2,0), (3,2)$ cuando gira alrededor del eje OY.

Solución

Calculemos las ecuaciones de las rectas que forman los lados del triángulo:

$$\begin{cases} \overline{AB}: \quad \dfrac{x-1}{2-1}=\dfrac{y-1}{0-1} \quad \Rightarrow \quad x+y-2=0 \\[2ex] \overline{AC}: \quad \dfrac{x-1}{3-1}=\dfrac{y-1}{2-1} \quad \Rightarrow \quad x-2y+1=0 \\[2ex] \overline{BC}: \quad \dfrac{x-2}{3-2}=\dfrac{y-0}{2-0} \quad \Rightarrow \quad 2x-y-1=0 \end{cases}$$



Recordemos que el volumen de revolución generado al girar la curva $x=\varphi(y)$, entre $y=c$, $y=d$, alrededor del eje de ordenadas viene dado por: $V=\pi\int_c^d x^2 dy$.

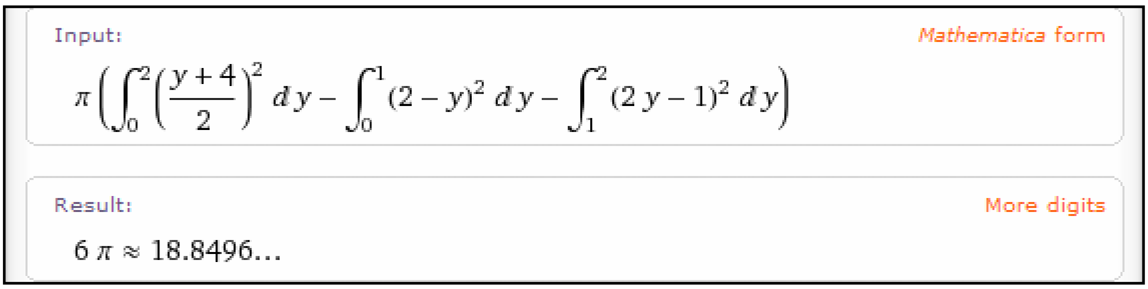
En nuestro caso: $V_{TOTAL}=V_{BC}-V_{AB}-V_{AC}$

$$V_{BC}=\pi\int_0^2\left(\frac{y+4}{2}\right)^2 dy=\frac{\pi}{4}\int_0^2\left(y^2+8y+16\right)dy=\frac{\pi}{4}\left[\frac{y^3}{3}+4y^2+16y\right]_0^2=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{152}{3}=\frac{38\pi}{3}$$

$$V_{AB}=\pi\int_0^1(2-y)^2 dy=\pi\int_0^2\left(4-4y+y^2\right)dy=\pi\left[4y-2y^2+\frac{y^3}{3}\right]_0^1=\frac{7\pi}{3}$$

$$V_{AC}=\pi\int_1^2(2y-1)^2 dy=\pi\int_0^2\left(4y^2-4y+1\right)dy=\pi\left[\frac{4y^3}{3}-2y^2+y\right]_1^2=\frac{13\pi}{3}$$

$$V_{TOTAL}=\frac{38\pi}{3}-\frac{7\pi}{3}-\frac{13\pi}{3}=\frac{18\pi}{3}=6\pi \quad u^3$$

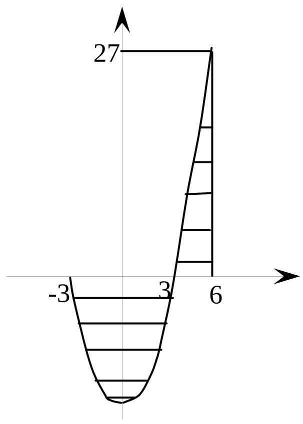


[8.10] a) Calcular el área limitada por la función $y = x^2 - 9$ y el eje OX, entre las abscisas $x = -3$ y $x = 6$

b) Determinar el volumen del sólido obtenido al girar la función $y = x^2 - 9$ alrededor del eje $y = 7$

Solución

a) Calcular el área limitada por la función $y = x^2 - 9$ y el eje OX, entre las abscisas $x = -3$ y $x = 6$.



$$A = -2\int_0^3 (x^2 - 9)dx + \int_3^6 (x^2 - 9)dx =$$

$$= -2\left[\frac{x^3}{3} - 9x\right]_0^3 + \left[\frac{x^3}{3} - 9x\right]_3^6 = 36 + 36 = 72 \text{ u}^2$$

Input:

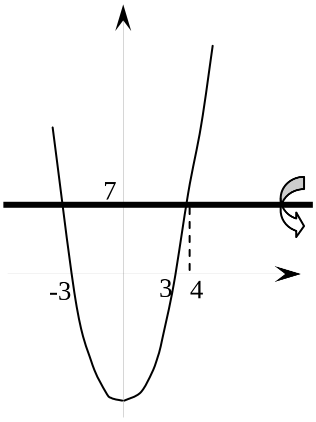
$$-2\int_0^3 (x^2 - 9)\,dx + \int_3^6 (x^2 - 9)\,dx$$

Mathematica form

Result:

72

b) Determinar el volumen del sólido obtenido al girar la función $y = x^2 - 9$ alrededor del eje $y = 7$.



Efectuando una traslación del origen al punto (0,7):

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' + 7 \end{cases}$$

$$y = x^2 - 9 \quad \Rightarrow \quad y' + 7 = x'^2 - 9 \quad \Rightarrow \quad y' = x'^2 - 16$$

$$V = 2\pi\int_0^4 (x'^2 - 16)^2\, dx' = 2\pi\left[\frac{x'^5}{5} - 32\frac{x'^3}{3} + 256x'\right]_0^4 = \frac{16384}{15}\pi \quad \text{u}^3$$

[8.11] Hallar la superficie que resulta al girar en torno del eje de abscisas una semionda de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$

Solución

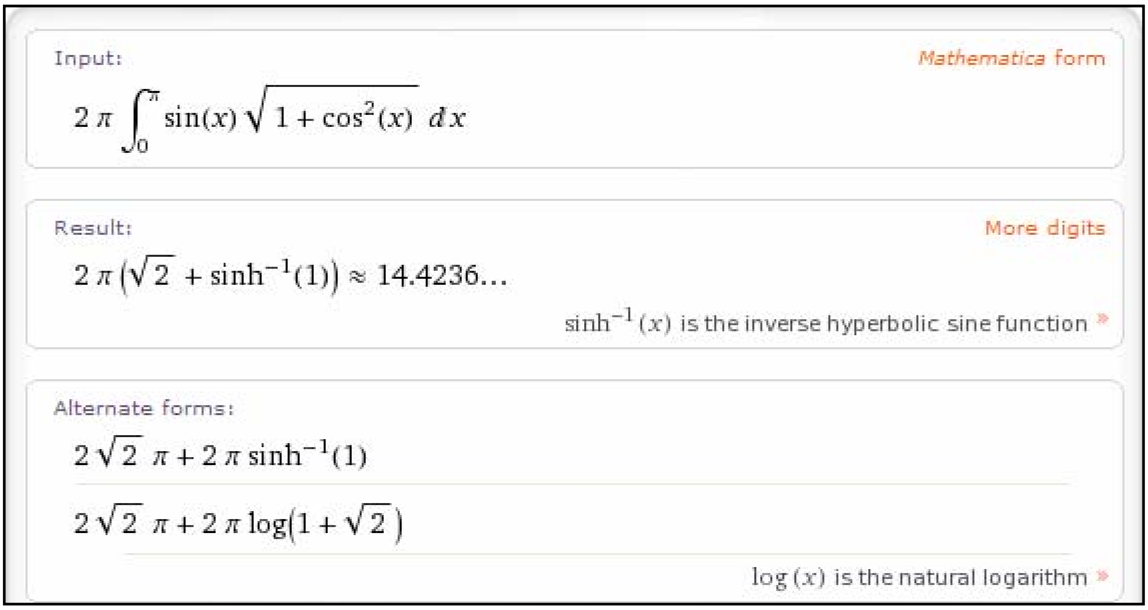
$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\, dx = 2\pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx = \left\{ \begin{array}{c} \cos x = \operatorname{sh} t \\ -\operatorname{sen} x\, dx = \operatorname{ch} t\, dt \\ x = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{arg\,sh} 1 \\ x = \pi \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{arg\,sh}(-1) \end{array} \right\} =$$

$$= 2\pi \int_{\operatorname{arg\,sh} 1}^{\operatorname{arg\,sh}(-1)} \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}\, (-\operatorname{ch} t)\, dt = 2\pi \int_{\operatorname{arg\,sh}(-1)}^{\operatorname{arg\,sh} 1} \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}\, \operatorname{ch} t\, dt = 2\pi \int_{\operatorname{arg\,sh}(-1)}^{\operatorname{arg\,sh} 1} \operatorname{ch}^2 t\, dt =$$

$$= 2\pi \int_{\operatorname{arg\,sh}(-1)}^{\operatorname{arg\,sh} 1} \frac{1+\operatorname{ch} 2t}{2}\, dt = \pi \left[t + \frac{\operatorname{sh} 2t}{2} \right]_{\operatorname{arg\,sh}(-1)}^{\operatorname{arg\,sh} 1} = \pi \left[t + \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t \right]_{\operatorname{arg\,sh}(-1)}^{\operatorname{arg\,sh} 1} =$$

$$= \pi \left[t + \operatorname{sh} t \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} \right]_{\operatorname{arg\,sh}(-1)}^{\operatorname{arg\,sh} 1} = \pi \left(\operatorname{arg\,sh} 1 + \sqrt{2} - \operatorname{arg\,sh}(-1) + \sqrt{2} \right) =$$

$$= \pi \left(2 \operatorname{arg\,sh} 1 + 2\sqrt{2} \right) = \pi \left[2 \ln(1+\sqrt{2}) + 2\sqrt{2} \right] \quad u^2$$

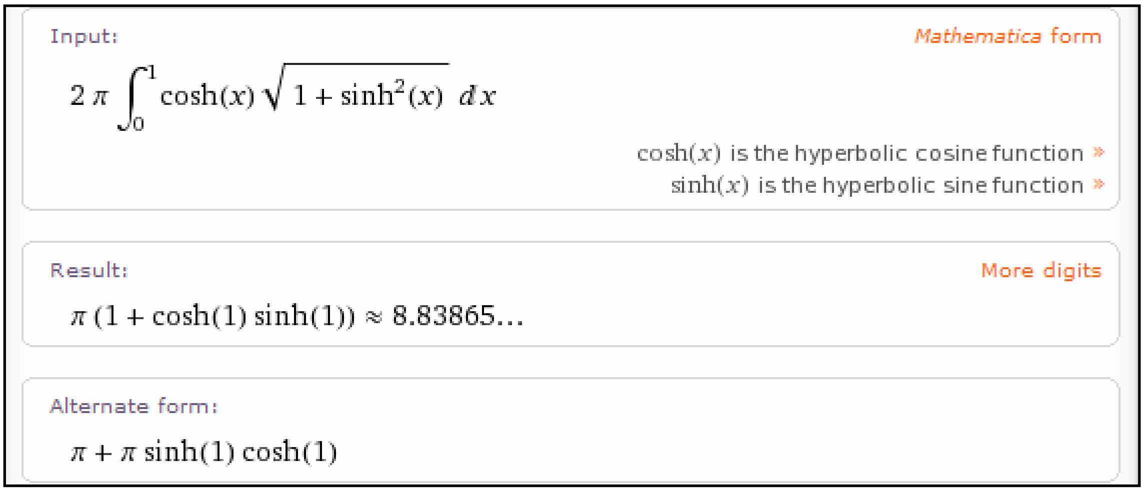


[8.12] Calcular la superficie de revolución engendrada por la catenaria $y = \operatorname{ch} x$ al girar alrededor del eje OX desde $x = 0$ hasta $x = 1$

Solución

$$S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2} = 2\pi\int_0^1 \operatorname{ch} x\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\, dx = 2\pi\int_0^1 \operatorname{ch}^2 x\, dx = \frac{2\pi}{2}\int_0^1 (1+\operatorname{ch} 2x)\, dx =$$

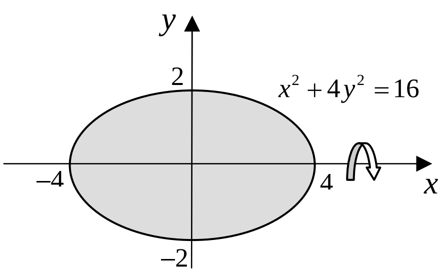
$$= \left[\pi\left(x+\frac{\operatorname{sh} 2x}{2}\right)\right]_0^1 = \pi\left(1+\frac{\operatorname{sh} 2}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(2+\frac{e^4-1}{2e^2}\right) \quad u^2$$



[8.13] Hallar el área de la superficie de revolución generada al hacer girar en torno al eje de abscisas la elipse:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$$

Solución



La fórmula de la superficie de revolución es: $S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\, dx$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1 \;\Rightarrow\; x^2+4y^2=16 \;\Rightarrow\; y=\pm\frac{\sqrt{16-x^2}}{2}$$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1 \xrightarrow{D_x} \frac{x}{8}+\frac{yy'}{2}=0 \;\Rightarrow\; x+4yy'=0 \;\Rightarrow\; y'=-\frac{x}{4y}$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{16y^2}} = \sqrt{\frac{16y^2+x^2}{16y^2}} = \frac{\sqrt{16y^2+x^2}}{4y}$$

Luego: $S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx = S=2\pi\int_{-4}^{4} y\cdot\dfrac{\sqrt{16y^2+x^2}}{4y}\,dx=\dfrac{\pi}{2}\int_{-4}^{4}\sqrt{16y^2+x^2}\,dx=$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{-4}^{4}\sqrt{64-4x^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}\int_{-4}^{4}\sqrt{64-3x^2}\,dx$$

Calculemos la integral indefinida:

$$\int\sqrt{64-3x^2}\,dx=\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}t \\ dx=\dfrac{8}{\sqrt{3}}\cos t\,dt\end{array}\right\}=\int\sqrt{64-64\operatorname{sen}^2 t}\cdot\frac{8}{\sqrt{3}}\cos t\,dt=\frac{64}{\sqrt{3}}\int\cos^2 t dt=$$

$$=\frac{64}{\sqrt{3}}\left(\frac{t}{2}+\frac{\operatorname{sen}2t}{4}\right)+C=\frac{32t}{\sqrt{3}}+\frac{16}{\sqrt{3}}\cdot 2\operatorname{sen}t\cos t+C=$$

$$=\frac{32}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x\sqrt{3}}{8}\right)+\frac{32}{\sqrt{3}}\cdot\frac{x\sqrt{3}}{8}\cdot\sqrt{1-\frac{3x^2}{64}}=\frac{32}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x\sqrt{3}}{8}\right)+\frac{x}{2}\cdot\sqrt{64-3x^2}+C$$

Volviendo a la definida:

$$S=\frac{\pi}{2}\left[\frac{32}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x\sqrt{3}}{8}\right)+\frac{x}{2}\cdot\sqrt{64-3x^2}\right]_{-4}^{4}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{32}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+8-\frac{32}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsen}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)+8\right]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{32}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3}+8+\frac{32}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3}+8\right]=8\pi\left(1+\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi\right)u^2$$

[8.14] Considérese el recinto plano situado en el primer cuadrante y limitado por la parábola $y^2=4x$, las rectas $x+y=3,\ x-y=2$ y el eje de abscisas. Determinar:

a) El área y el perímetro de este recinto.

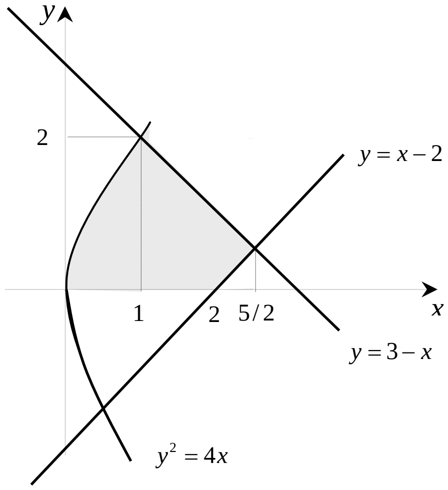
b) El volumen engendrado por dicha región al girar alrededor del eje $0Y$.

Solución

Puntos de corte

1. $\begin{cases} y = x-2 \\ y = 3-x \end{cases} \Rightarrow \quad x-2 = 3-x \quad \Rightarrow \quad 2x = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{5}{2}$

2. $\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = 3-x \end{cases} \Rightarrow \quad 4x = (3-x)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 10x + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} 9 \\ 1 \end{cases}$



a) El área y el perímetro de este recinto

$$A = \int_0^1 2x^{1/2}dx + \int_1^{5/2}(3-x)dx - \int_2^{5/2}(x-2)dx = \frac{4}{3}x^{3/2}\Big]_0^1 + (3x - x^2/2)\Big]_0^{5/2} -$$

$$-(-2x + x^2/2)\Big]_2^{5/2} = \frac{4}{3} + \frac{15}{8} - \frac{1}{8} = \frac{37}{12} \quad u^2$$

Input: *Mathematica* form

$$\int_0^1 2\sqrt{x}\,dx + \left(\int_1^{\frac{5}{2}}(3-x)\,dx - \int_2^{\frac{5}{2}}(x-2)\,dx\right)$$

Result: More digits

$$\frac{37}{12} \approx 3.08333\ldots$$

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$$

$$y^2 = 4x \quad \Rightarrow \quad y' = x^{-1/2} \quad \Rightarrow \quad 1 + (y')^2 = 1 + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$$

$$L_1 = \int_0^1 \sqrt{\frac{x+1}{x}}\, dx = \left(\sqrt{x}\,\sqrt{x+1} + \operatorname{arg\,sh}\sqrt{x}\ \right)\Big]_0^1 = \sqrt{2} + \operatorname{arg\,sh} 1$$

$$y = 3 - x \quad \Rightarrow \quad y' = -1 \quad \Rightarrow \quad 1 + (y')^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{2}$$

$$L_2 = \int_1^{5/2} \sqrt{2}\, dx = \sqrt{2}\left(\frac{5}{2} - 1\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$y = x - 2 \quad \Rightarrow \quad y' = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 + (y')^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{2}$$

$$L_3 = \int_2^{5/2} \sqrt{2}\, dx = \sqrt{2}\left(\frac{5}{2} - 2\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \wedge \qquad L_4 = 2$$

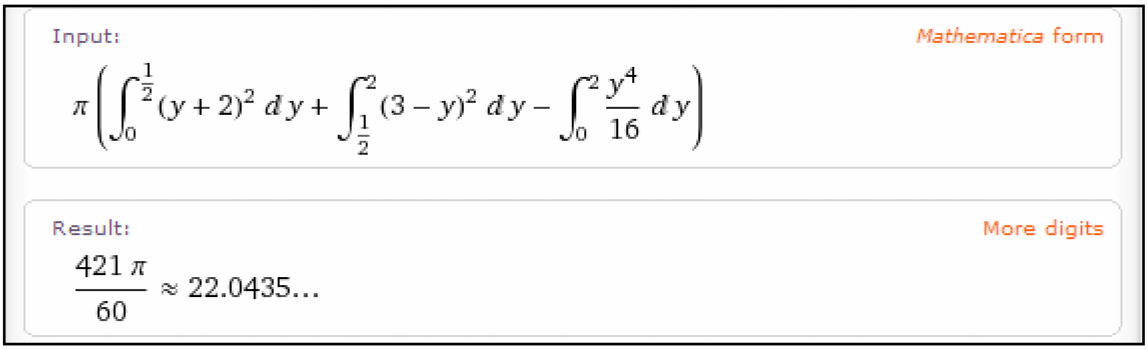
$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = \sqrt{2} + \operatorname{arg\,sh} 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 2 + 3\sqrt{2} + \operatorname{arg\,sh} 1 \quad u$$

b) El volumen engendrado por dicha región al girar alrededor del eje $0Y$

$$V = \pi\left[\int_0^{1/2} (y+2)^2 dy + \int_{1/2}^{2} (3-y)^2 dy - \int_0^2 (y^4/16) dy\right] =$$

$$= \pi\left[\left(\frac{y^3}{3} + 2y^2 + y\right)\Bigg]_0^{1/2} + \left(\frac{y^3}{3} - 3y^2 + 9y\right)\Bigg]_{1/2}^{2} - \left(\frac{y^5}{80}\right)\Bigg]_0^2\right] = \pi\left[\frac{61}{24} + \frac{39}{8} - \frac{2}{5}\right] =$$

$$= \frac{421}{60}\pi \quad u^3$$


Input:

Mathematica form

$$\pi\left(\int_0^{\frac{1}{2}} (y+2)^2\, dy + \int_{\frac{1}{2}}^{2} (3-y)^2\, dy - \int_0^2 \frac{y^4}{16}\, dy\right)$$

Result:

More digits

$$\frac{421\,\pi}{60} \approx 22.0435\ldots$$