FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

[5.1] Hallar y representar gráficamente las curvas de nivel de la función $f(x,y) = x^2 y$.

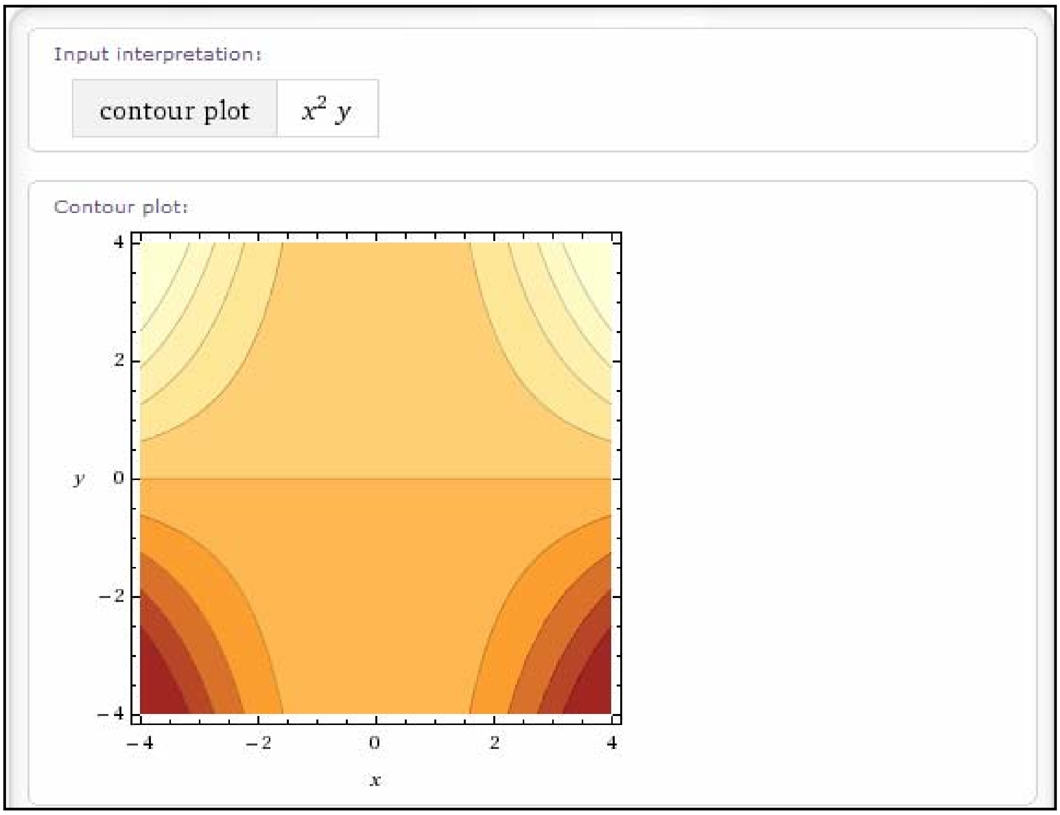
Solución

Por definición $C_m = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 y = m \right\}$.

Por tanto:

$$C_0 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 y = 0 \right\} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x = 0 \vee y = 0 \right\}$$

$$C_m = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 y = m \right\} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = \frac{m}{x^2} \right\} \text{ si } m \neq 0$$



[5.2] Hallar y representar gráficamente las curvas de nivel de la función $f(x,y)=1-|x|-|y|$

Solución

Por definición $C_m=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 1-|x|-|y|=m\}$.

Por tanto, como $1-m=|x|+|y|\geq 0$, deducimos que $m\leq 1$. En este caso:

Para $m=1$: $C_1=\{(0,0)\}$

Para $m<1$:

Si $x,y\geq 0$: $1-x-y=m \Rightarrow y=1-x-m$

Si $x,y<0$: $1+x+y=m \Rightarrow y=-1-x+m$

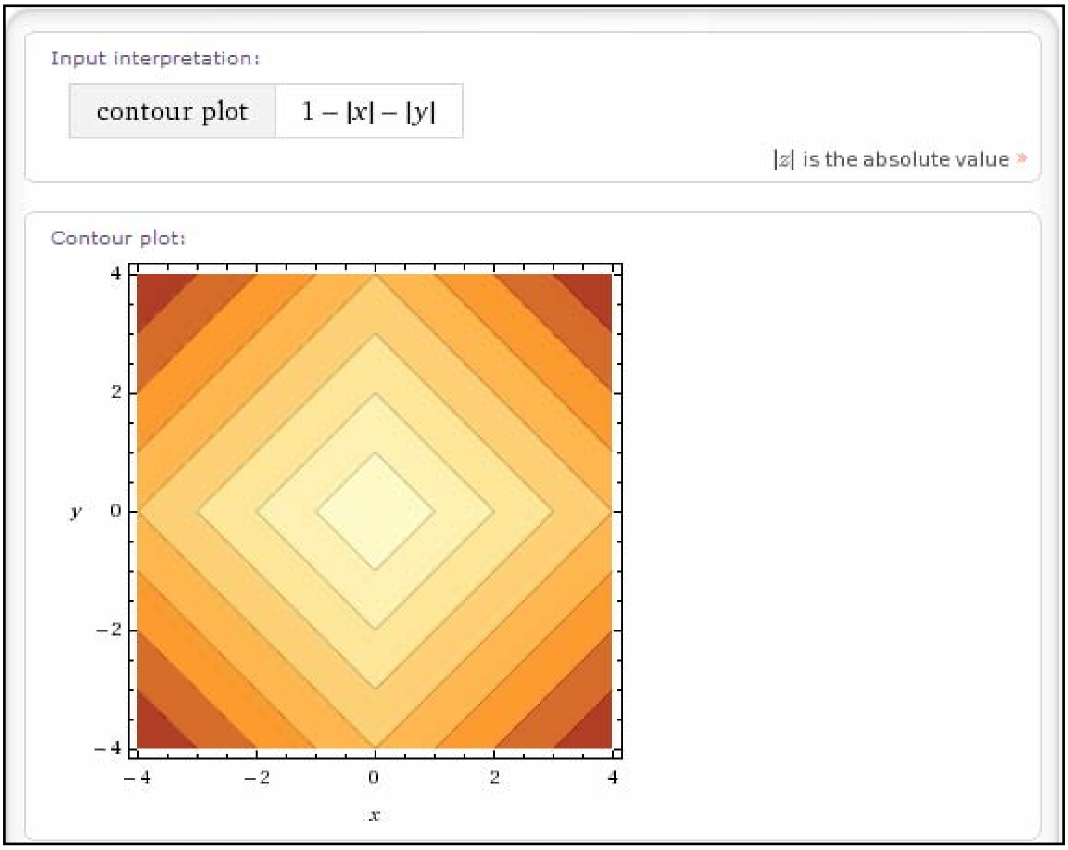
Si $x>0 \wedge y<0$: $1-x+y=m \Rightarrow y=-1+x+m$

Si $x<0 \wedge y>0$: $1+x-y=m \Rightarrow y=1+x-m$

Por tanto:

$C_1=\{(0,0)\}$

$$C_m=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y=1-x-m \wedge x\geq 0 \wedge y\geq 0\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y=-1-x+m \wedge x<0 \wedge y<0\}\cup$$
$$\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y=-1+x+m \wedge x>0 \wedge y<0\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y=1+x-m \wedge x<0 \wedge y>0\} \text{ para m<1}$$



[5.3] Demostrar que los siguientes límites no existen:

1.- $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{1-xy}{x^2-y}$

2.- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

Solución

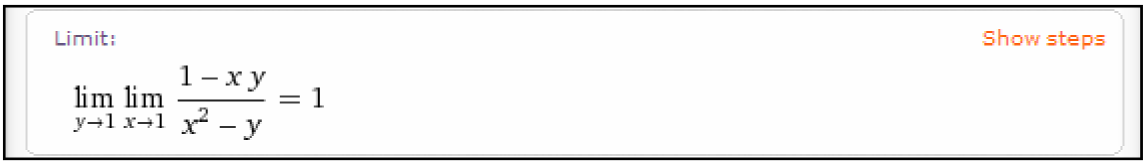
1.- $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{1-xy}{x^2-y}$

Límites reiterados

$$\lim_{x\to 1}\left[\lim_{y\to 1} \frac{1-xy}{x^2-y}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{x+1} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{y\to 1}\left[\lim_{x\to 1} \frac{1-xy}{x^2-y}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{1-y}{1-y} = 1$$

Los límites reiterados existen y son distintos, por lo que no existe el límite doble.



2.- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

Límites reiterados

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{xy^2}{x^2+y^4}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{xy^2}{x^2+y^4}\right] = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^4} = 0$$

Existen y son iguales. Puede existir el límite doble.

Limit: Show steps

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x\,y^2}{x^2+y^4}=0$$

Limit: Show steps

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x\,y^2}{x^2+y^4}=0$$

*Límites según una dirección***,** $x=my^2$

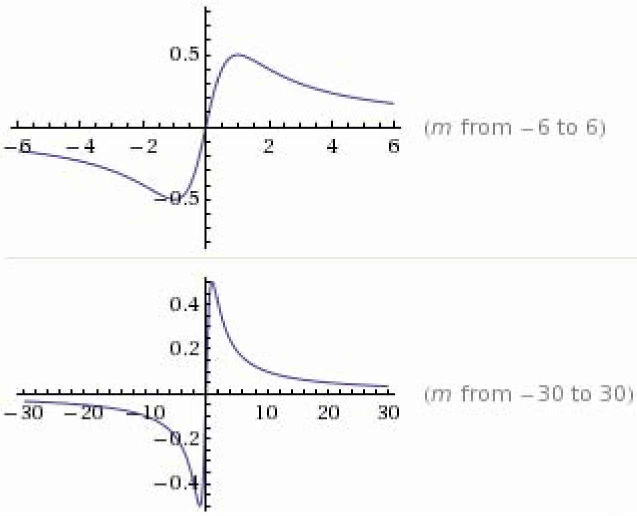
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=my^2}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{y\to 0}\frac{my^4}{m^2y^4+y^4}=\lim_{y\to 0}\frac{my^4}{y^4(1+m^2)}=\frac{m}{1+m^2}$$

Los límites según diferentes parábolas existen y son distintos, por lo que no existe el límite doble.

Limit: Show steps

$$\lim_{y\to 0}\frac{m\,y^4}{m^2\,y^4+y^4}=\frac{m}{1+m^2}$$

Plots:



[5.4] Estudiar la existencia de los siguientes límites:

1.- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$

2.- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$

Solución

1.- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$

Límites reiterados

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{y^2}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{0}{\sqrt[3]{x^2}} = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{y^2}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}\right] = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{\sqrt[3]{y^2}} = \lim_{y\to 0} y^{4/3} = 0$$

Existen y son iguales. Puede existir el límite doble.

Si realizamos un cambio a coordenadas polares: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{\sqrt[3]{\rho^2}} = \lim_{\rho\to 0} \rho^{4/3}\,\mathrm{sen}^2\,\theta \underset{\uparrow\ \boxed{\substack{\mathrm{sen}^2\,\theta\in[0,1] \\ \rho\to 0}}}{=} 0$$

Input: Mathematica form

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$$

Result:

0

2.- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$

Límites reiterados

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$
$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}\right] = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{y^2} = 1$$

Existen y son iguales. Puede existir el límite doble.

Si realizamos un cambio a coordenadas polares: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{(\rho\cos\theta + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)^2}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2(\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta)^2}{\rho^2} = (\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta)^2$$

Como el valor del límite depende del valor de θ podemos concluir que $\nexists \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$.


Input:

Mathematica form

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$$

Result:

(limit does not exist)

(value depends on x, y path)

[5.5] Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

1.- $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

2.- $f(x,y)=\begin{cases} xe^{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Solución

1.- $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Si $(x,y)\neq(0,0)$, $f(x,y)$ es continua por ser cociente de funciones continuas y el denominador no nulo.

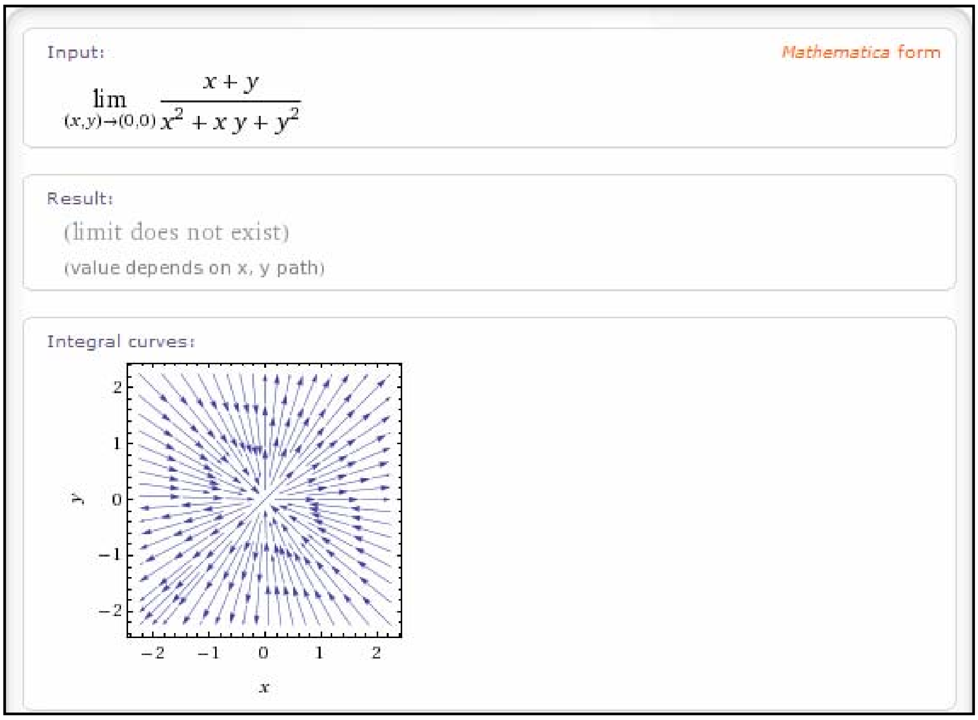
Si $(x,y)=(0,0)$, tenemos que comprobar que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$$

Si calculamos los *límites reiterados*:

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\neq 0=f(0,0)$$

Por tanto, como $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, f no es continua en (0,0). Luego f es continua en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.



2.- $f(x,y)=\begin{cases} xe^{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Si $(x,y)\neq(0,0)$, $f(x,y)$ es continua por ser producto de funciones continuas.

Si $(x,y)=(0,0)$, tenemos que comprobar que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)= f(0,0)$$

Si calculamos los *límites reiterados*:

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} xe^{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\right]=\lim_{x\to 0}\ x\,e=0$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} xe^{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\right]=\lim_{y\to 0}\ 0\,e^{-1}=0$$

Existen y son iguales. Puede existir el límite doble.

Si realizamos un cambio a coordenadas polares: $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\,e^{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to 0}\rho\cos\theta\, e^{\frac{\rho^2(\cos^2\theta-\mathrm{sen}^2\,\theta)}{\rho^2}}=\lim_{\rho\to 0}\rho\cos\theta\, e^{(\cos^2\theta-\mathrm{sen}^2\,\theta)}\underset{(*)}{=}0$$

(*) Utilizamos que es el producto de una función que tiende a cero por una función acotada.

Por tanto f es continua en $\mathbb{R}^2$.

[5.6] Estudiar la derivabilidad de la función:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Solución

Si $(x,y)\neq(0,0)$, $f(x,y)$ es derivable por ser cociente de funciones derivables y el denominador no nulo.

Si $(x,y)=(0,0)$, hay que estudiar la existencia de las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}=0$$

Por tanto f es derivable en $\mathbb{R}^2$.

[5.7] Estudiar la continuidad y derivabilidad de la siguiente función en el punto (0,0):

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{xy} & xy\neq 0\\ 0 & xy=0\end{cases}$$

Solución

Comprobemos si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$.

Si calculamos los *límites reiterados*:

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{x+y}{xy}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x}{0}=\nexists$$

Limit: Show steps

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x+y}{x\,y}=\infty$$

Limit: Show steps

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x+y}{x\,y}=\infty$$

Si realizamos un cambio a coordenadas polares: $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{xy}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho\cos\theta+\rho\,\mathrm{sen}\,\theta}{\rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho(\cos\theta+\mathrm{sen}\,\theta)}{\rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\cos\theta+\mathrm{sen}\,\theta}{\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}=\infty$$

Por tanto f no es continua en (0,0).

Para comprobar la derivabilidad en (0,0) analizamos la existencia de las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k} = 0$$

Por tanto f es derivable y no continua en (0,0).

[5.8] Estudiar la continuidad y derivabilidad de la siguiente función en el punto (0,0):

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2|y| & y \neq 0 \\ 3 & y = 0 \end{cases}$$

Solución

Comprobemos si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 3$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2|y| = 0 \neq f(0,0) = 3$$

Por tanto f no es continua en (0,0).

Para comprobar la derivabilidad en (0,0) analizamos la existencia de las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3-3}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0-3}{k} = \nexists$$

Por tanto f no es derivable en (0,0).

[5.9] Comprobar que $z = e^{-\frac{cx}{a}} \varphi\left(ay - bx\right)$ es solución de la EDP :

$$az_x + bz_y + cz = 0$$

Solución:

Se tiene: $z_x = -\frac{c}{a} e^{-\frac{cx}{a}} \varphi - b e^{-\frac{cx}{a}} \varphi' \qquad z_y = a e^{-\frac{cx}{a}} \varphi'$

De donde:

$$az_x + bz_y + cz = a\left(-\frac{c}{a} e^{-\frac{cx}{a}} \varphi - b e^{-\frac{cx}{a}} \varphi' \right) + b\left(a e^{-\frac{cx}{a}} \varphi' \right) + c\left(e^{-\frac{cx}{a}} \varphi \right) = 0$$

[5.10] Comprobar que $z = y^{-3} \varphi\left(\frac{x^3}{y^2} + x \right)$ es solución de la EDP:

$$2x^3 z_x + (y^2 + 3x^2)(yz_y + 3z) = 0$$

Solución:

$$z_x = y^{-3}\left(\frac{3x^2}{y^2} + 1 \right)\varphi' \quad ; \quad z_y = -3y^{-4}\varphi + y^{-3}\left(-\frac{2x^3}{y^3} \right)\varphi'$$

$$2\,x^3 z_x + (y^2 + 3x^2)(yz_y + 3z) =$$

$$= 2x^3 y^{-3}\left(\frac{3x^2}{y^2} + 1 \right)\varphi' + (y^2 + 3x^2)\left(y\left[-3y^{-4}\varphi + y^{-3}\left(-\frac{2x^3}{y^3} \right)\varphi' \right] + 3y^{-3}\,\varphi \right) =$$

$$= 2\frac{x^3}{y^3}\left(\frac{3x^2 + y^2}{y^2} \right)\varphi' + (y^2 + 3x^2)\left(-3y^{-3}\varphi - \frac{2x^3}{y^5}\varphi' + 3y^{-3}\varphi \right) =$$

$$= 2\,\frac{x^3(3x^2 + y^2)}{y^5}\varphi' + (y^2 + 3x^2)\left(-\frac{2x^3}{y^5}\varphi' \right) = 0$$

[5.11] Comprobar que la función $z = x^2 \ln\left|\dfrac{y}{x}\right|$ cumple la ecuación de Euler:

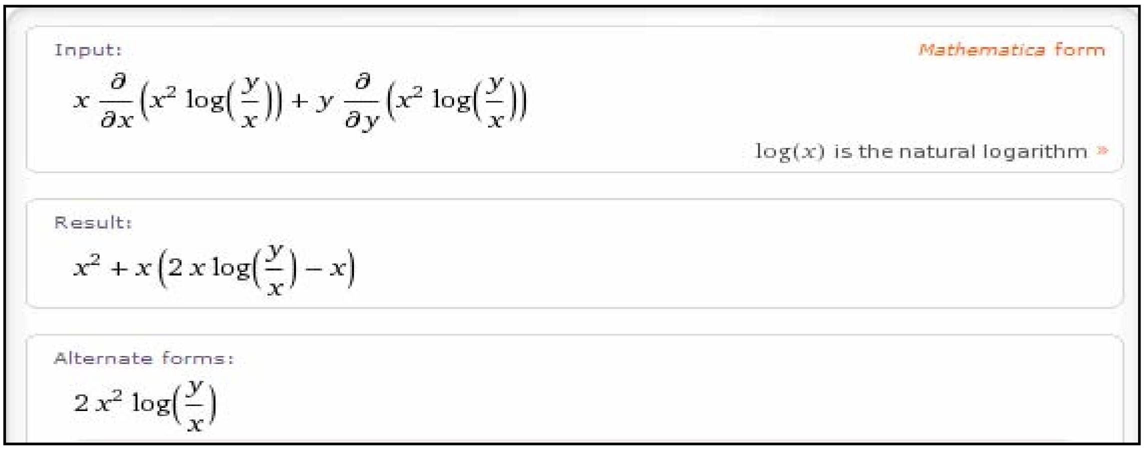
$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$$

Solución:

$$z = x^2 \ln\left|\frac{y}{x}\right| \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x\ln\left|\dfrac{y}{x}\right| + x^2\left(\dfrac{x}{y}\right)\left(\dfrac{-y}{x^2}\right) = 2x\ln\left|\dfrac{y}{x}\right| - x \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2\left(\dfrac{x}{y}\right)\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{x^2}{y} \end{cases}$$

Al sustituir en la ecuación de Euler:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x\left(2x\ln\left|\frac{y}{x}\right| - x\right) + y\left(\frac{x^2}{y}\right) = 2\left(x^2\ln\left|\frac{y}{x}\right|\right) = 2z$$


Input:

$$x\,\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\log\left(\frac{y}{x}\right)\right) + y\,\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2\log\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

Mathematica form

$\log(x)$ is the natural logarithm »

Result:

$$x^2 + x\left(2\,x\log\left(\frac{y}{x}\right) - x\right)$$

Alternate forms:

$$2\,x^2\log\left(\frac{y}{x}\right)$$

[5.12] Demostrar que la función $z = y\cdot\varphi(x^2 - y^2)$, siendo φ una función arbitraria y diferenciable, satisface la ecuación: $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$

Solución:

Se tiene: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2yx\varphi'$ $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \varphi - 2y^2\varphi'$

Sustituyendo:

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\varphi' + \frac{\varphi}{y} - 2y\varphi' = \frac{\varphi}{y} = \frac{z}{y^2}$$

Input interpretation:

simplify	$\dfrac{\frac{\partial(y\,f(x^2-y^2))}{\partial x}}{x}$

Result:

simplify	$2\,y\,f'(x^2-y^2)$

Input interpretation:

simplify	$\dfrac{\frac{\partial(y\,f(x^2-y^2))}{\partial y}}{y}$

Result:

$$\frac{f(x^2-y^2)}{y}-2\,y\,f'(x^2-y^2)$$

[5.13] Dada la función $z=(x+y)\cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x+y}\right)$ obtener lo más simplificadamente posible el valor de la expresión: $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$

Solución:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\operatorname{sen}\left(\frac{x}{x+y}\right)+(x+y)\cdot\cos\left(\frac{x}{x+y}\right)\cdot\left[\frac{x+y-x}{(x+y)^2}\right]=\operatorname{sen}\left(\frac{x}{x+y}\right)+\frac{y}{x+y}\cdot\cos\left(\frac{x}{x+y}\right)$$

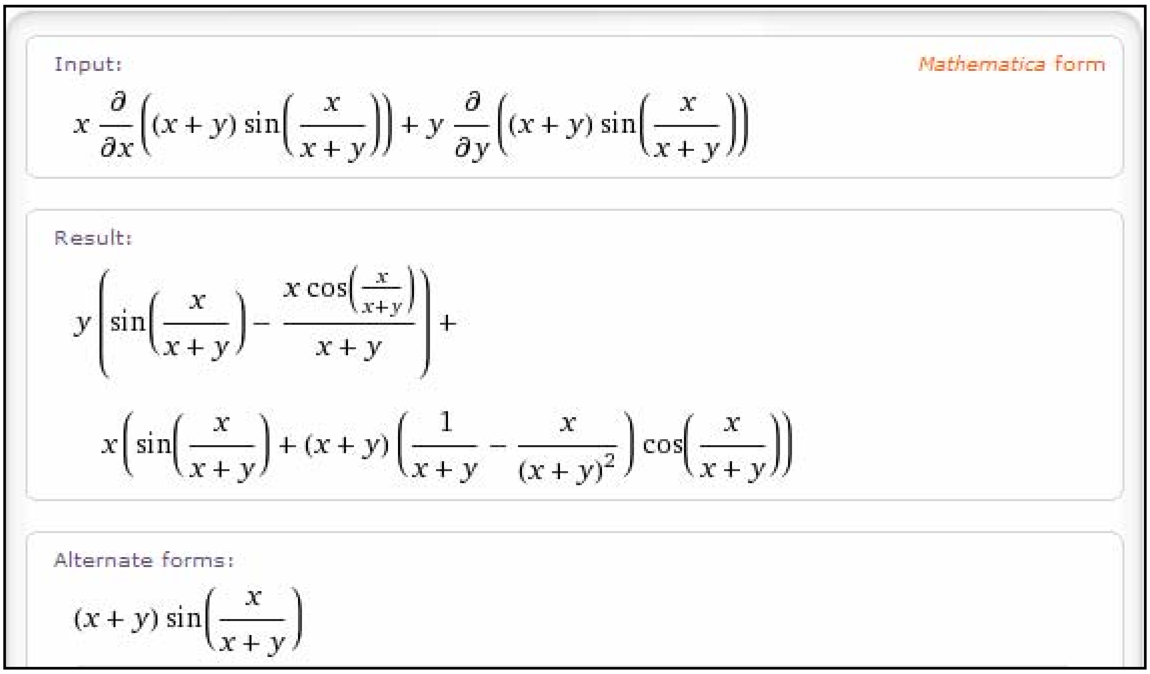
$$x\frac{\partial z}{\partial x}=x\operatorname{sen}\left(\frac{x}{x+y}\right)+\frac{x\,y}{x+y}\cdot\cos\left(\frac{x}{x+y}\right)\qquad [1]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\operatorname{sen}\left(\frac{x}{x+y}\right)+(x+y)\cdot\cos\left(\frac{x}{x+y}\right)\cdot\left[\frac{-x}{(x+y)^2}\right]=\operatorname{sen}\left(\frac{x}{x+y}\right)-\frac{x}{x+y}\cdot\cos\left(\frac{x}{x+y}\right)$$

$$y\frac{\partial z}{\partial y}=y\operatorname{sen}\left(\frac{x}{x+y}\right)-\frac{x\,y}{x+y}\cdot\cos\left(\frac{x}{x+y}\right)\qquad [2]$$

Haciendo [1] + [2]:

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x}+y\,\frac{\partial z}{\partial y}=(x+y)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x}{x+y}\right)=z$$



[5.14] Dada la función $z^2+\frac{2}{x}-\sqrt{y^2-z^2}=0$, demostrar que $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{z}$

Solución:

$$z^2+\frac{2}{x}-\sqrt{y^2-z^2}=0\rightarrow 2z\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{2}\frac{2z\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{y^2-z^2}}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(2z+\frac{z}{\sqrt{y^2-z^2}}\right)=\frac{2}{x^2}\rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2\sqrt{y^2-z^2}}{x^2\left(2z\sqrt{y^2-z^2}+z\right)}$$

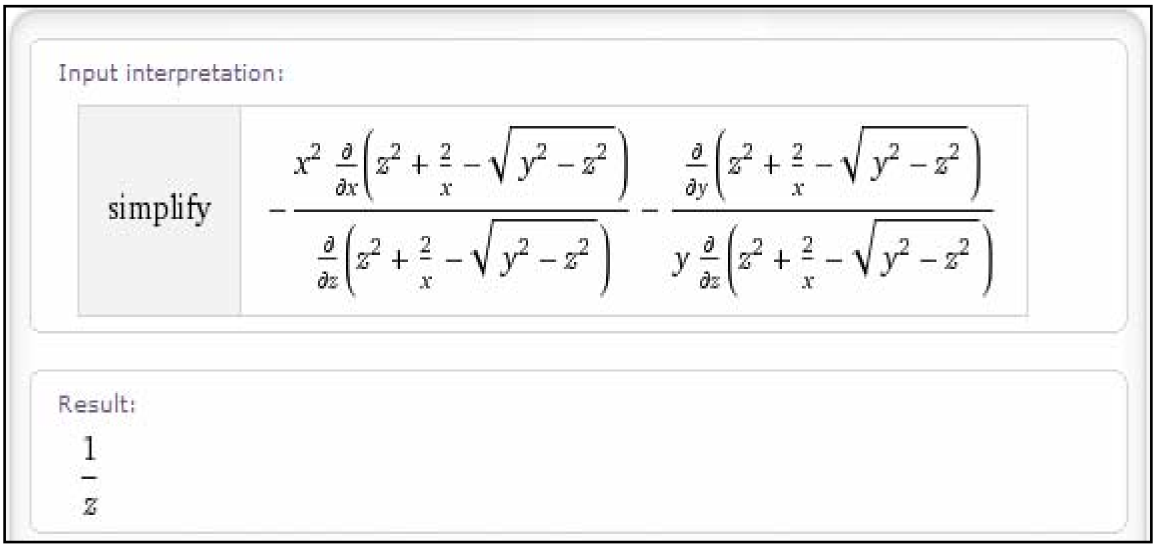
$$z^2+\frac{2}{x}-\sqrt{y^2-z^2}=0\rightarrow 2z\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{1}{2}\frac{2y-2z\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{y^2-z^2}}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\left(2z+\frac{z}{\sqrt{y^2-z^2}}\right)=\frac{y}{\sqrt{y^2-z^2}}\rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{2z\sqrt{y^2-z^2}+z}$$

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\left[\frac{2\sqrt{y^2-z^2}}{x^2\left(2z\sqrt{y^2-z^2}+z\right)}\right]+\frac{1}{y}\left[\frac{y}{2z\sqrt{y^2-z^2}+z}\right]=$$

$$=\frac{2\sqrt{y^2-z^2}}{\left(2z\sqrt{y^2-z^2}+z\right)}+\frac{1}{\left(2z\sqrt{y^2-z^2}+z\right)}=\left[\frac{2\sqrt{y^2-z^2}+1}{2z\sqrt{y^2-z^2}+z}\right]=\frac{1}{z}$$

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{z}$$



[5.15] Se considera la función $z=z(x,y)$ definida mediante la ecuación:

$$1+2\,x\,y\,z=2x^2\cdot\Phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

donde (Φ) designa una función arbitraria diferenciable. Hallar de manera simplificada el valor de la expresión diferencial:

$$xy\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Solución:

Al derivar la ecuación respecto a x e y

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}}\quad 2yz+2xy\frac{\partial z}{\partial x}=4x\cdot\Phi+2x^2\cdot\Phi'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\quad\rightarrow\quad\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{4x\cdot\Phi-2y\cdot\Phi'-2yz}{2xy}$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \quad 2xz + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 \cdot \Phi' \cdot \left(\frac{1}{x}\right) \quad \to \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x\cdot\Phi' - 2xz}{2xy}$$

y sustituir en la expresión diferencial:

$$xy\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) \equiv xy\left(x\frac{4x\cdot\Phi - 2y\cdot\Phi' - 2yz}{2xy} + y\frac{2x\cdot\Phi' - 2xz}{2xy}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x(4x\cdot\Phi - 2y\cdot\Phi' - 2yz) + y(2x\cdot\Phi' - 2xz)\right] = 2x^2\Phi - 2xyz = 1 + 2xyz - 2xyz = 1$$

[5.16] Sea la función $z = f(x,y)$ definida implícitamente por la relación:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$$

Obtener la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $P(1,1,-1)$

Solución:

La ecuación del plano tangente a una superficie en un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es:

$$z - z_0 = z'_x(x_0,y_0)\cdot(x - x_0) + z'_y(x_0,y_0)\cdot(y - y_0)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0 \quad \xrightarrow{D_x} \quad 2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} - 2 - 6\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (2z-6)\frac{\partial z}{\partial x} = 2 - 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1-x}{z-3} \quad \Rightarrow \quad z'_x(1,1,-1) = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0 \quad \xrightarrow{D_y} \quad 2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} + 4 - 6\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (2z-6)\frac{\partial z}{\partial y} = -2y - 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y-2}{z-3} \quad \Rightarrow \quad z'_y(1,1,-1) = 3/4$$

Por lo tanto, la ecuación del plano tangente a la superficie dada en P$(1,1,-1)$ es:

$$z + 1 = 0\cdot(x-1) + \frac{3}{4}\cdot(y-1) \quad \Rightarrow \quad 4z + 4 = 3y - 3 \quad \Rightarrow \quad 3y - 4z - 7 = 0$$

[5.17] Dada la función $z = u \cdot v + 2v^2$, donde $\begin{cases} u = x^2 - y^3 \\ v = 2x \end{cases}$ calcular dz

Solución:

Aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} = v \cdot 2x + (u + 4v) \cdot 2 = 2vx + 2u + 8v = 4x^2 + 2x^2 - 2y^3 + 16x =$$

$$= 6x^2 - 2y^3 + 16x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = v(-3y^2) = -6xy^2$$

Luego: $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (6x^2 - 2y^3 + 16x)dx - 6xy^2 dy$

[5.18] Comprobar que $z = y^{-1}\left[f(ax + y) + g(ax - y) \right]$, donde f y g son funciones arbitrarias diferenciables de segundo orden, es solución de la EDP:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{a^2}{y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left[y^2 \frac{\partial z}{\partial y} \right]$$

Solución:

Derivando respecto de x: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a(f' + g')}{y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{a^2(f'' + g'')}{y}$

Derivando respecto de y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f + g}{y^2} + \frac{f' - g'}{y} \quad \Rightarrow \quad y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = -(f + g) + y(f' - g')$$

Por tanto: $\frac{\partial}{\partial y}\left[y^2 \frac{\partial z}{\partial y} \right] = -(f' - g') + (f' - g') + y(f'' + g'') = y(f'' + g'')$

De donde:

$$\frac{a^2}{y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left[y^2 \frac{\partial z}{\partial y} \right] = \frac{a^2(f'' + g'')}{y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

[5.19] Dada la función $z^3 - xz - y = 0$, demostrar que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{(3z^2 + x)}{(3z^2 - x)^3}$

Solución:

Derivando implícitamente respecto de (x):

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} - z - x\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \;\Rightarrow\; (3z^2 - x)\frac{\partial z}{\partial x} = z \;\Rightarrow\; \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{3z^2 - x} \quad [1]$$

Derivando implícitamente respecto de (y):

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} - x\frac{\partial z}{\partial y} - 1 = 0 \;\Rightarrow\; (3z^2 - x)\frac{\partial z}{\partial y} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3z^2 - x} \quad [2]$$

Derivando [1] respecto de (y):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{3z^2 - x}\right) = \frac{(3z^2 - x)\dfrac{\partial z}{\partial y} - z \cdot 6z\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(3z^2 - x)^2} = -\frac{(3z^2 + x)\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(3z^2 - x)^2} = -\frac{(3z^2 + x)}{(3z^2 - x)^3}$$

[5.20] Si $\begin{cases} x = e^{2r}\cos\theta \\ y = e^{3r}\operatorname{sen}\theta \end{cases}$ calcular $\dfrac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}$ utilizando propiedades del jacobiano.

Solución:

Utilizaremos la propiedad: $\dfrac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = \dfrac{1}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}}$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2e^{2r}\cos\theta & -e^{2r}\operatorname{sen}\theta \\ 3e^{3r}\operatorname{sen}\theta & e^{3r}\cos\theta \end{vmatrix} = 2e^{5r}\cos^2\theta + 3e^{5r}\operatorname{sen}^2\theta =$$

$$= e^{5r}(2\cos^2\theta + 3\operatorname{sen}^2\theta) = e^{5r}(2 + \operatorname{sen}^2\theta)$$

Luego:

$$\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}} = \frac{1}{e^{5r}(2 + \operatorname{sen}^2\theta)} = \frac{e^{-5r}}{2 + \operatorname{sen}^2\theta}$$

Input: *Mathematica form*

$$\left\{\frac{\partial}{\partial r}(\exp(2\,r)\cos(t)),\ \frac{\partial}{\partial t}(\exp(2\,r)\cos(t))\right\}$$

Exact result:

$$\{2\,e^{2\,r}\cos(t),\ -e^{2\,r}\sin(t)\}$$

Input: *Mathematica form*

$$\left\{\frac{\partial}{\partial r}(\exp(3\,r)\sin(t)),\ \frac{\partial}{\partial t}(\exp(3\,r)\sin(t))\right\}$$

Exact result:

$$\{3\,e^{3\,r}\sin(t),\ e^{3\,r}\cos(t)\}$$

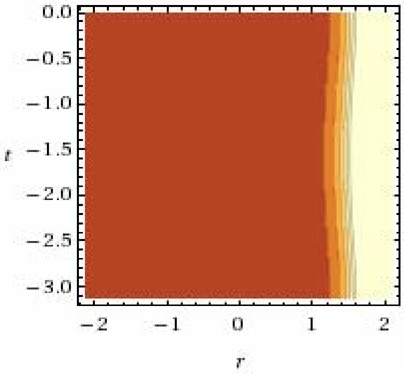
Input interpretation:

$$\left|\begin{pmatrix} 2\,e^{2\,r}\cos(t) & -e^{2\,r}\sin(t) \\ 3\,e^{3\,r}\sin(t) & e^{3\,r}\cos(t) \end{pmatrix}\right|$$

Result:

$$3\,e^{5\,r}\sin^2(t) + 2\,e^{5\,r}\cos^2(t)$$

Contour plot:



[5.21] Obtener los extremos locales de la función

$$f(x,y)=x^3+y^2-6xy+6x+3y-2$$

Solución:

Se determinan los puntos críticos (valores que anulan a las derivadas parciales):

$$f(x,y)=x^3+y^2-6xy+6x+3y-2 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2-6y+6=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2y-6x+3=0 \end{cases} \quad\rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-6x+5=0 \\ y=\dfrac{6x-3}{2} \end{cases} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x=5,\quad y=\dfrac{27}{2} \quad\rightarrow\quad P_1=\left(5,\dfrac{27}{2}\right) \\ x=1,\quad y=\dfrac{3}{2} \quad\rightarrow\quad P_2=\left(1,\dfrac{3}{2}\right) \end{cases}$$

Hallamos la matriz hessiana

$$H=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Y los dos menores preferentes

$$H_1=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x$$

$$H_2=|H|=\begin{vmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}=12x-36$$

En $P_1=\left(5,\dfrac{27}{2}\right)$ hay un mínimo local ya que $H_1=30>0 \quad\wedge\quad H_2=60-36=24>0$

$$f\left(5,\frac{27}{2}\right)=\frac{-117}{4}$$

En $P_2=\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$ hay un punto silla, $H_2=12-36=-24<0$

$$f\left(1,\frac{3}{2}\right)=\frac{11}{4}$$

[5.22] Determinar los extremos locales de la función f definida por:

$$f(x,y) = e^{4y} + 2x^4 - 4x^2e^y$$

Solución

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 8x^3 - 8xe^y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4e^{4y} - 4x^2e^y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x(x^2 - e^y) = 0 \\ e^y(4e^{3y} - 4x^2) = 0 \end{cases}$$

$$8x(x^2 - e^y) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow e^y(4e^{3y}) = 0 \Rightarrow 4e^{4y} = 0 \quad \text{imposible} \\ \qquad\qquad \vee \\ x^2 - e^y = 0 \Rightarrow e^y(4e^{3y} - 4e^y) = 0 \Rightarrow 4e^{2y}(e^{2y} - 1) = 0 \Rightarrow e^{2y} - 1 = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Como $x^2 = e^y \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$

Se obtienen dos puntos críticos: $P_1(1,0)$ y $P_2(-1,0)$.

Hallamos la matriz hessiana

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24x^2 - 8e^y & -8xe^y \\ -8xe^y & 16e^{4y} - 4x^2e^y \end{pmatrix}$$

Y los dos menores preferentes

$$H_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24x^2 - 8e^y$$

$$H_2 = |H| = (24x^2 - 8e^y)(16e^{4y} - 4x^2) - (8xe^y)^2$$

En $P_1(1,0)$ hay un mínimo local ya que $H_1 = 24 - 8 = 16 > 0 \wedge H_2 = 16.12 - 64 = 128 > 0$

$$f(1,0) = -1$$

En $P_2(-1,0)$ hay también un mínimo local, $H_1 = 24 - 8 = 16 > 0 \wedge H_2 = 24.12 - 64 = 128 > 0$

$$f(-1,0) = -1$$

[5.23] Sea la función f definida por: $f(x,y)=x^2+y^2-\alpha xy$ donde α es un número real. Hallar los valores de α de forma que la función f tenga extremos locales.

Solución

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=0 \iff 2x-\alpha y=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0 \iff 2y-\alpha x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\alpha}{2}y \\ 2y-\alpha\dfrac{\alpha}{2}y=0 \Rightarrow 4y-\alpha^2 y=0 \Rightarrow y(4-\alpha^2)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y=0 \quad \vee \quad \alpha=2 \quad \vee \quad \alpha=-2$$

Si $y=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow$ el punto $P_1=(0,0)$ es un punto crítico $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

Si $\alpha=2 \Rightarrow y=x \Rightarrow$ los puntos $P_2=(x,x)$ son puntos críticos $\forall x\in\mathbb{R}$

Si $\alpha=-2 \Rightarrow y=-x \Rightarrow$ los puntos $P_3=(x,-x)$ son puntos críticos $\forall x\in\mathbb{R}$

Veremos si son extremos estudiando la matriz hessiana y los menores preferentes en cada uno de ellos.

$$H=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -\alpha \\ -\alpha & 2 \end{pmatrix}$$

$$H_1=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2>0$$
$$H_2=\left|H\right|=4-\alpha^2=(2-\alpha)(2+\alpha)$$

1) $P_1=(0,0)$

Al ser $H_1>0$ estudiamos las diferentes posibilidades para H_2 según el valor de $\alpha\in\mathbb{R}$

(1a) $H_2>0 \iff 4-\alpha^2>0 \iff \alpha\in(-2,2)$ P_1 es un mínimo local

(1b) $H_2<0 \iff 4-\alpha^2<0 \iff \alpha<-2 \vee \alpha>2$ P_1 no es un extremo sino un punto de silla

(1c) Si $\alpha=2 \vee \alpha=-2 \Rightarrow H_2=0$ y es un caso dudoso con este criterio, pero observamos que

$$\alpha=2 \rightarrow f(x,y)=x^2+y^2-2xy=(x-y)^2$$
$$\alpha=-2 \rightarrow f(x,y)=x^2+y^2+2xy=(x+y)^2$$

y, en ambos casos, para todos los puntos (x,y) de un entorno del origen se cumple que $f(x,y)>f(0,0)=0 \Rightarrow$ en $P_1=(0,0)$ hay un mínimo local

2) $\alpha = 2$ y $P_2 = (x, x)$

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2 > 0$ mientras que $f(P_2) = f(x,x) = 0$ en P_2 hay un mínimo local

3) $\alpha = -2$ y $P_3 = (x, -x)$

$f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy = (x+y)^2 > 0$ mientras que $f(P_3) = f(x,-x) = 0$ en P_3 hay un mínimo local

[5.24] Sean las funciones f y f_1 definidas por:

$$f(x,y) = xy, \quad f_1(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

Hallar los extremos locales de f condicionados por la ecuación $f_1(x,y) = 0$.

Solución

Consideramos la función auxiliar $L(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ y buscamos los puntos críticos que cumplan la ecuación $x^2 + y^2 - 1 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x} = y + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow[y\neq 0]{x\neq 0} \left.\begin{array}{l} \lambda = -\dfrac{y}{2x} \\ \lambda = -\dfrac{x}{2y} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -\dfrac{y}{2x} = -\dfrac{x}{2y} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} y^2 = x^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow 2x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Si $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \text{donde } \lambda = -\dfrac{y}{2x} = -\dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \text{donde } \lambda = -\dfrac{y}{2x} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Si $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \text{donde } \lambda = -\dfrac{y}{2x} = -\dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \text{donde } \lambda = -\dfrac{y}{2x} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

luego los puntos críticos son:

$$P_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ y } P_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ asociados al valor } \lambda=\frac{1}{2}$$

$$P_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ y } P_4=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ asociados al valor } \lambda=-\frac{1}{2}$$

Además, la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2x & 2y\end{pmatrix}$ es de rango 1 siempre que $(x,y)\neq(0,0)$

Hallamos la matriz hessiana orlada:

$$H(L)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 1 \\ 2y & 1 & 2\lambda\end{pmatrix}$$

Para $P_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\lambda=\frac{1}{2}$:

$$\left|H(L)\right|=\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1\end{vmatrix}=-8<0\Rightarrow P_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ Mínimo local condicionado}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2}$$

Para $P_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\lambda=\frac{1}{2}$:

$$\left|H(L)\right|=\begin{vmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1\end{vmatrix}=-8<0\Rightarrow P_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ Mínimo local condicionado}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2}$$

Para $P_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\lambda=-\frac{1}{2}$:

$$\left|H(L)\right|=\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \end{vmatrix}=8<0\Rightarrow P_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ Máximo local condicionado}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}$$

Para $P_4=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\lambda=-\frac{1}{2}$:

$$\left|H(L)\right|=\begin{vmatrix} 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & -1 \end{vmatrix}=8<0\Rightarrow P_4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ Máximo local condicionado}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}$$

[5.25] Hallar los extremos condicionados de la función $z(x,y)=x^2+y^2$, estando ligadas las variables x e y por la relación $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Solución:

Consideramos la función Lagrangiana:

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)$$

Igualando a cero las derivadas parciales de la función Lagrangiana y teniendo presente la condición $f_1(x,y)=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$ se obtienen los posibles extremos relativos:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=2x+\frac{1}{a}\lambda=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}=2y+\frac{1}{b}\lambda=0 \\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda=-2ax \\ \lambda=-2by \\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ax=by \\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\frac{ab^2}{a^2+b^2} \\ y=\frac{a^2b}{a^2+b^2} \\ \lambda=-\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2} \end{cases}$$

Además, la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1/a & 1/b \end{pmatrix}$ es de rango 1 ya que $a\cdot b\neq 0$

Para determinar si el punto es máximo o mínimo se calcula el determinante de la matriz hessiana orlada en dicho punto:

$$|H(L)| = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1/a & 1/b \\ 1/a & 2 & 0 \\ 1/b & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{2}{b^2} - \frac{2}{a^2} < 0$$

La función tiene un mínimo local en el punto $x = \dfrac{ab^2}{a^2+b^2}$, $y = \dfrac{a^2 b}{a^2+b^2}$ condicionado por la ecuación $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$. Además, $z\left(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}, \dfrac{a^2 b}{a^2+b^2}\right) = \dfrac{a^2 b^2}{a^2+b^2}$

[5.26] Sean las funciones f y f_1 definidas por:

$$f(x,y,z) = xy + xz + yz\,, \quad f_1(x,y,z) = xyz - 8$$

Hallar los extremos locales de f condicionados por la ecuación $f_1(x,y,z) = 0$.

Solución

Resolveremos el problema por el método de los multiplicadores de Lagrange.

Consideramos la función auxiliar $L(x,y,z,\lambda) = xy + xz + yz + \lambda(xyz - 8)$ y buscamos los puntos críticos que cumplan la ecuación $xyz - 8 = 0$

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial L}{\partial x} = y + z + \lambda yz = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = x + z + \lambda xz = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = x + y + \lambda xy = 0 \\ xyz = 8 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} \lambda = -\dfrac{y+z}{yz} \\ \lambda = -\dfrac{x+z}{xz} \\ \lambda = -\dfrac{x+y}{xy} \\ xyz = 8 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} \dfrac{y+z}{yz} = \dfrac{x+z}{xz} \\ \dfrac{x+z}{xz} = \dfrac{x+y}{xy} \\ xyz = 8 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} x = y \\ y = z \\ xyz = 8 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{c} x = y = z \\ x^3 = 8 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} x = y = z = 2 \\ \lambda = -1 \end{array}\right\}$$

Obtenemos un sólo punto crítico, el $P = (2,2,2)$ asociado al valor $\lambda = -1$

Además, la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & yz & xz & xy \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ en el punto $P=(2,2,2)$ es de rango 1.

Hallamos la matriz hessiana orlada

$$H(L)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & yz & xz & xy \\ yz & 0 & 1+\lambda z & 1+\lambda y \\ xz & 1+\lambda z & 0 & 1+\lambda x \\ xy & 1+\lambda y & 1+\lambda x & 0 \end{pmatrix}$$

que evaluada en el punto $(2,2,2)$ es: $H(L)=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

y los dos últimos menores preferentes:

$$H_3=\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-16-16=-32<0$$

$$H_4=|H|=16\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-48<0$$

cuyos signos coinciden con $(-1)^1=(-1)^{\text{nº de condiciones}}$

Se deduce que la función $f(x,y,z)=xy+xz+yz$ tiene un mínimo local en el punto $(2,2,2)$ condicionado por la ecuación $f_1(x,y,z)=xyz-8=0$