DERIVADAS DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

[4.1] Estudiar la derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & x\le 1 \\ \dfrac{1}{x} & x>1 \end{cases}$ y obtener $f'(x)$ en los puntos en los que esté definida.

Solución:

En primer lugar observamos que el dominio de la función es todo $\mathbb{R}$.
Además, si $x<1$ f es derivable por ser un polinomio y si $x>1$ también lo es por ser un cociente de funciones derivables.
El único punto dudoso es el $x=1$ en el que la función cambia de expresión analítica.

Estudiaremos la derivabilidad calculando las derivadas laterales:

$$f'_-(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\dfrac{3-(1+h)^2}{2}-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{3-1-2h-h^2-2}{2h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-2-h}{2}=-1$$

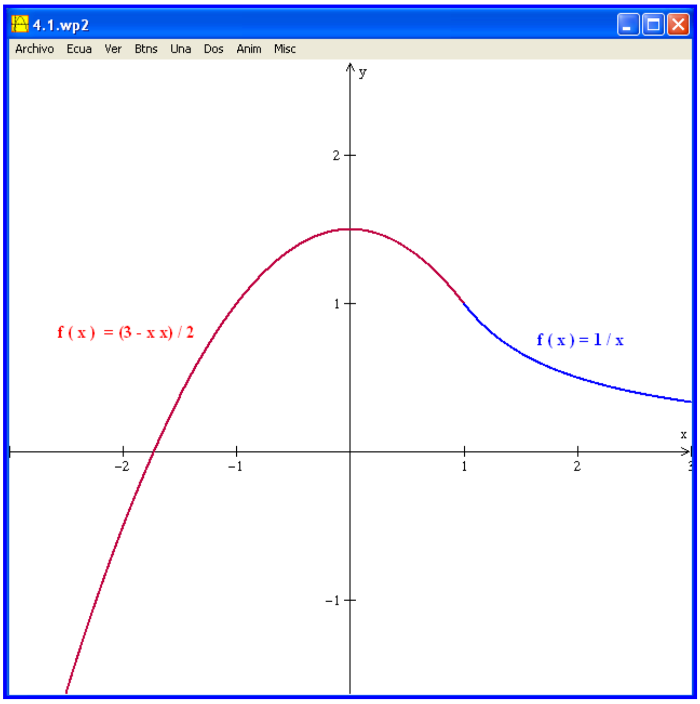
$$f'_+(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{1+h}-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1-1-h}{h(1+h)}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-1}{1+h}=-1$$

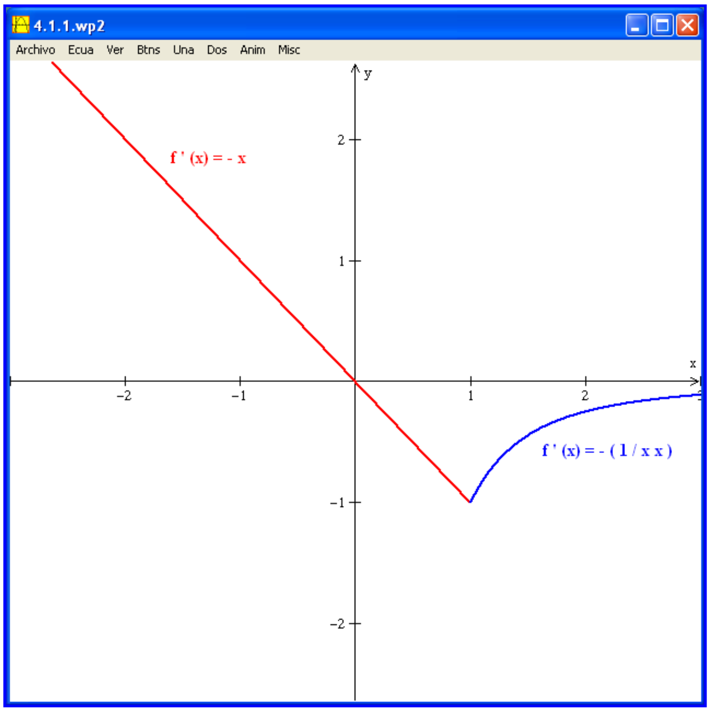
Como: $f'_-(1)=f'_+(1)=-1 \quad\Rightarrow\quad f$ es derivable en $x=1$ siendo $f'(1)=-1$

También se podría hacer hallando las derivadas de las dos funciones y viendo si coinciden en $x=1$

$$\left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{3-x^2}{2}\right)'_{x=1}=\left(-\dfrac{1}{2}2x\right)_{x=1}=-1 \\ \left(\dfrac{1}{x}\right)'_{x=1}=\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)_{x=1}=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f'_-(1)=f'_+(1)=-1$$

Resulta: $$f'(x)=\begin{cases} -x & x<1 \\ -1 & x=1 \\ -\dfrac{1}{x^2} & x>1 \end{cases}$$





[4.2] Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=|x|\sqrt{x+1}$

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

Solución:

a) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x+1\geq 0\}=[-1,+\infty)$

Se puede poner: $f(x)=|x|\sqrt{x+1}=\begin{cases} -x\sqrt{x+1} & -1\leq x\leq 0 \\ x\sqrt{x+1} & x>0 \end{cases}$

Estudiamos en $x=0$ ya que en los demás puntos es derivable por ser producto de funciones derivables.

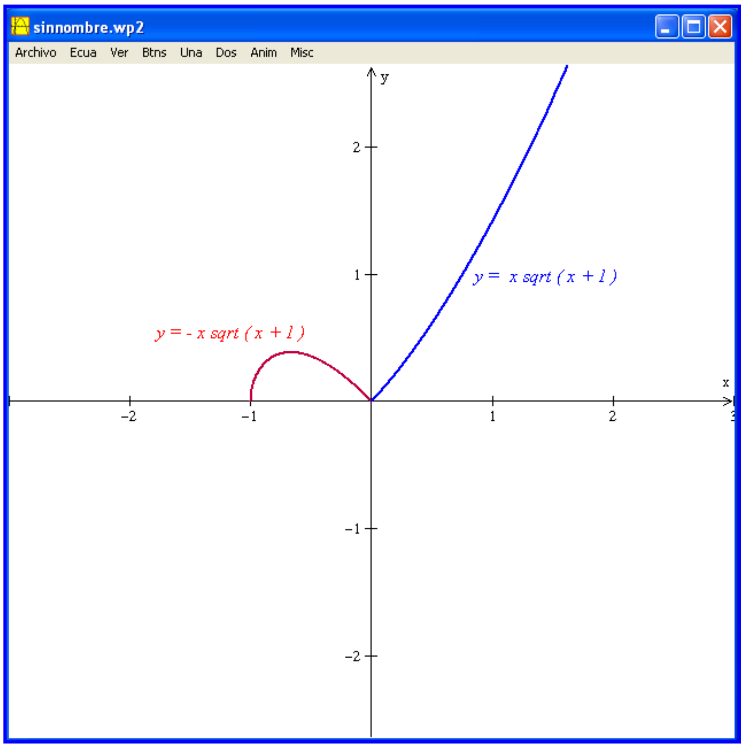
$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h\sqrt{h+1}-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}-\sqrt{h+1}=-1$$

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h\sqrt{h+1}-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\sqrt{h+1}=1$$

Como: $-1=f'_-(0)\neq f'_+(0)=1 \quad\Rightarrow\quad f$ no es derivable en $x=0$

Por lo tanto, f es derivable en $(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

En la siguiente gráfica se observa que $x=0$ es un punto "anguloso".



b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ D = $\mathbb{R}$

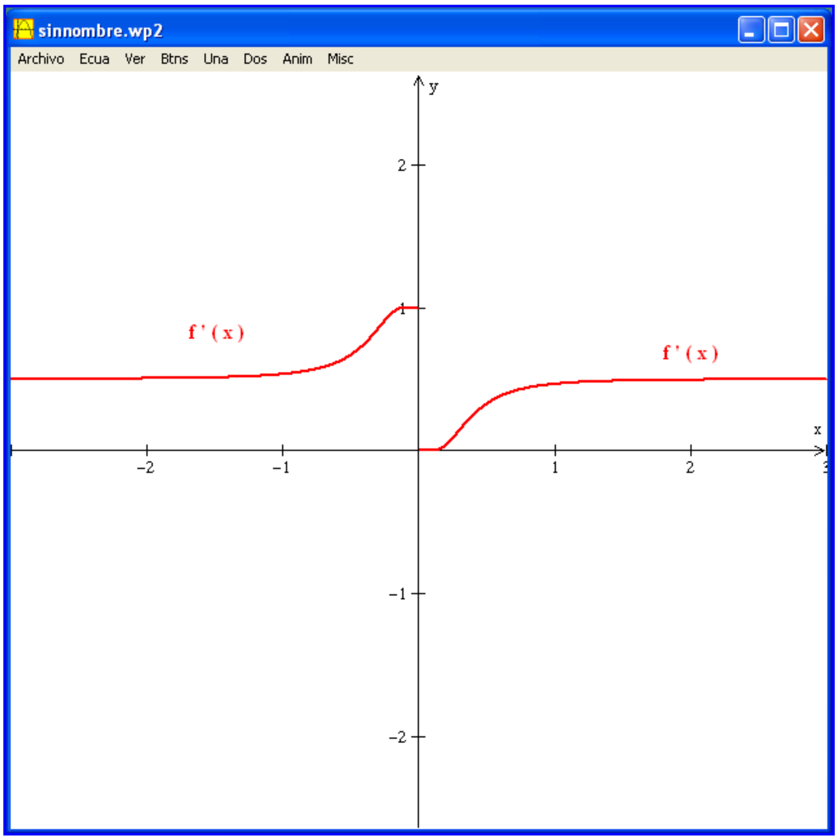
Si $x\neq 0$, f es una función derivable por ser un cociente de funciones derivables.

Para el estudio en $x=0$ hallamos las derivadas laterales.

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\dfrac{h}{1+e^{1/h}}-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{1+e^{1/h}}=1$$

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\dfrac{h}{1+e^{1/h}}-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{1+e^{1/h}}=0$$

Por lo tanto, como $1=f'_-(0)\neq f'_-(0)=0 \quad\Rightarrow\quad f$ no es derivable en $x=0$.



[4.3] Según cierta teoría médica el peligro de un virus se mide en función del tiempo que lleva en el organismo mediante la siguiente expresión [$P(t)$ representa el peligro para un tiempo de t minutos]:

$$P(t)=\begin{cases} t^2 & \text{si} \quad 0\le t\le 5 \\ \dfrac{50t-62.5}{0.5t+5} & \text{si} \quad t>5 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad del peligro como función del tiempo.

b) ¿El peligro del virus crece a medida que permanece más tiempo en el organismo?

c) Por mucho tiempo que lleve en el organismo, ¿puede superar el virus una peligrosidad de 95? ¿y de 100?

Solución:

a) Se trata de una función definida a tramos.

En el interior del primer intervalo, la función es continua (es una parábola).

En el interior del segundo intervalo, la función también es continua, puesto que el valor que anularía el denominador $0.5t+5=0 \quad \rightarrow \quad t=-10$ se encuentra fuera del intervalo.

Bastará con analizar el punto de unión $t=5$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 5^-} P(t)=\lim\limits_{t\to 5^-} t^2=25 \\ \lim\limits_{t\to 5^+} P(t)=\lim\limits_{t\to 5^+} \dfrac{50t-62.5}{0.5t+5}=\dfrac{250-62.5}{2.5+5}=25 \end{cases}$$

La función existe en $t=5$, su valor es $P(5)=5^2=25$, y coincide con el valor de los límites laterales que son iguales. Por ello, la función es continua en todo su dominio.

Limit: Show steps

$$\lim_{t\to 5} t^2 = 25$$

Limit: Show steps

$$\lim_{t\to 5} \frac{50\,t-62.5}{0.5\,t+5} = 25.$$

b) Se trata de analizar el crecimiento de la función. Para ello analizaremos el signo de la primera derivada:

$$\begin{cases} \text{tramo 1:} \quad P'(t) = 2t & \rightarrow \quad P'(t) > 0 \quad \forall t \in (0,5) \\ \text{tramo 2:} \quad P'(t) = \dfrac{281.25}{(0.5t+5)^2} & \rightarrow \quad P'(t) > 0 \quad \forall t \in (5,\infty) \end{cases}$$

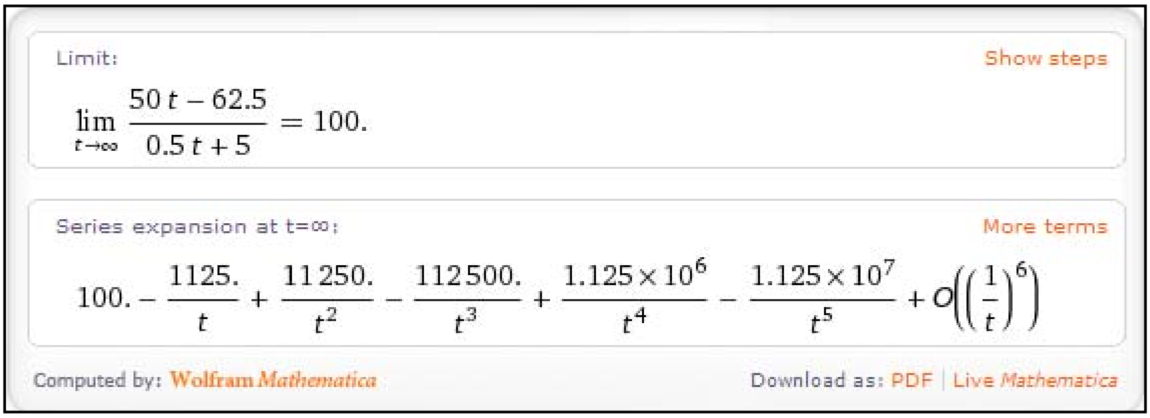
Por lo tanto, el peligro del virus crece a medida que permanece más tiempo en el organismo.

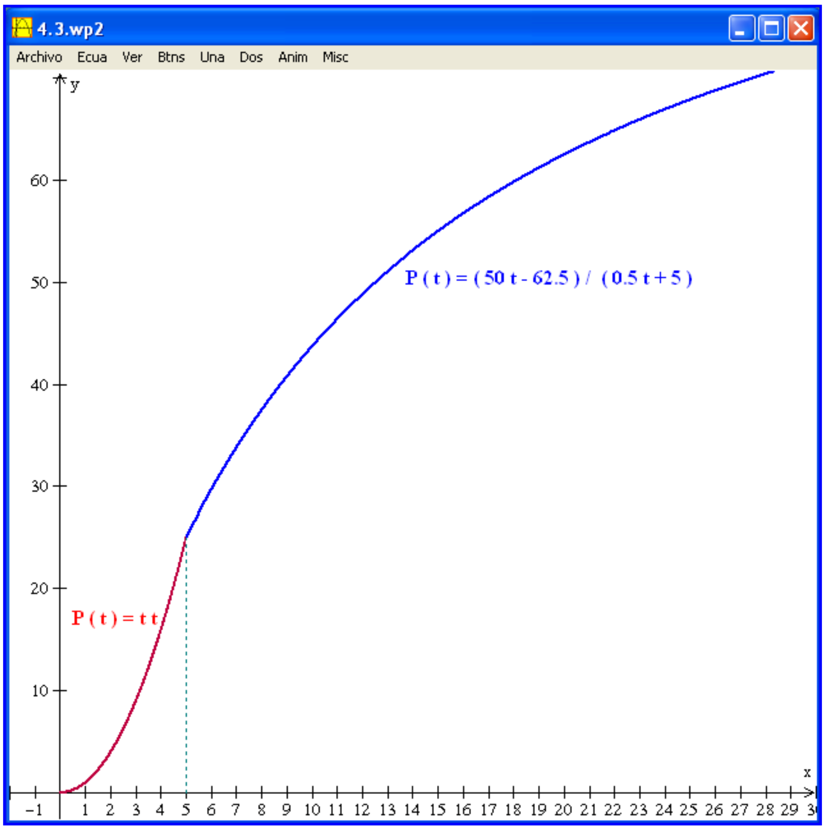
---

c) Se trata de determinar la tendencia de la función cuando $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t\to\infty}\left[\frac{50t-62.5}{0.5t+5}\right] = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{50}{0.5} = 100$$

Por tanto el virus puede llegar a superar la peligrosidad de 95, pero no llegará a alcanzar una peligrosidad de 100. La función presenta una asíntota horizontal $P(t) = 100$





[4.4] Dada la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ probar que $\dfrac{|y''|}{\left[1+y'^2\right]^{3/2}} = \dfrac{1}{r}$

Solución:

$$x^2 + y^2 = r^2 \xrightarrow{D_x} 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

$$\left[1+y'^2\right]^{3/2} = \left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)^{3/2} = \left(\frac{x^2+y^2}{y^2}\right)^{3/2} = \left(\frac{r^2}{y^2}\right)^{3/2} = \frac{r^3}{y^3}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right) = \frac{-y + x\,y'}{y^2} = \frac{-y + x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = \frac{-y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-(x^2+y^2)}{y^3} = \frac{-r^2}{y^3}$$

$$|y''| = \frac{r^2}{y^3} \Rightarrow \frac{|y''|}{\left[1+y'^2\right]^{3/2}} = \frac{r^2/y^3}{r^3/y^3} = \frac{1}{r}$$

[4.5] Sea la función definida por $(x\,y)^{\operatorname{sen} x} = y^x$. Obtener $\dfrac{dy}{dx}$.

Solución:

Utilizando la derivación logarítmica:

$$(x\,y)^{\operatorname{sen} x} = y^x \Rightarrow \operatorname{sen} x \ln(x\,y) = x \ln y$$

$$\cos x \ln(xy) + \operatorname{sen} x \frac{1}{xy}(y + xy') = \ln y + x\frac{1}{y}y'$$

$$\cos x \ln(x\,y) + \frac{1}{x}\operatorname{sen} x + \frac{y'}{y}\operatorname{sen} x = \ln y + \frac{x}{y}y'$$

$$\left(\frac{\operatorname{sen} x}{y} - \frac{x}{y}\right)y' = \ln y - \frac{\operatorname{sen} x}{x} - \cos x \ln(xy)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\operatorname{sen} x - x}\left[\ln y - \frac{\operatorname{sen} x}{x} - \cos x \ln(xy)\right]$$

[4.6] Usando derivación implícita, hallar la pendiente de la recta tangente a la curva:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$$

en el punto de abscisa $x = 2$ y ordenada positiva.

Solución:

Calculemos la ordenada para $x = 2$:

$$4 + y^2 - 8 + 2y - 11 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 + 2y - 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 3 \\ -5 \end{cases}$$

Puesto que la ordenada debe ser positiva, el punto en cuestión es el $(2,3)$

Derivando implícitamente la ecuación de la curva: $2x + 2yy' - 4 + 2y' = 0$

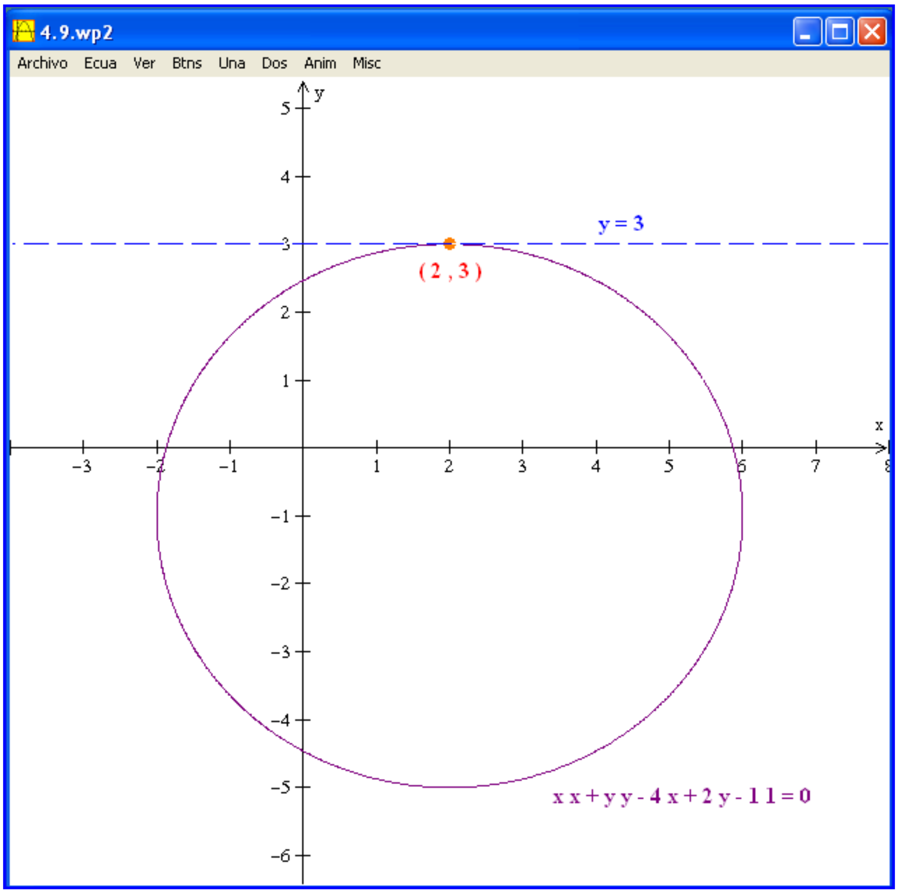
Sustituyendo las coordenadas del punto $(2,3)$ en la expresión de la derivada:

$$2 \cdot 2 + 2 \cdot 3y' - 4 + 2y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(2) = 0$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 3 = 0 \cdot (x - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3$$

Se trata, por tanto, de una recta paralela al eje de abscisas.



[4.7] Justificar que $4x-4y-21=0$ es una recta tangente a la parábola $y=x^2-2x-3$, paralela a la cuerda que une los puntos de la parábola $A(0,-3);\ B(3,0)$.

Solución:

La función $y=x^2-2x-3$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Si se aplica el teorema de Lagrange en el intervalo $[0,3]$:

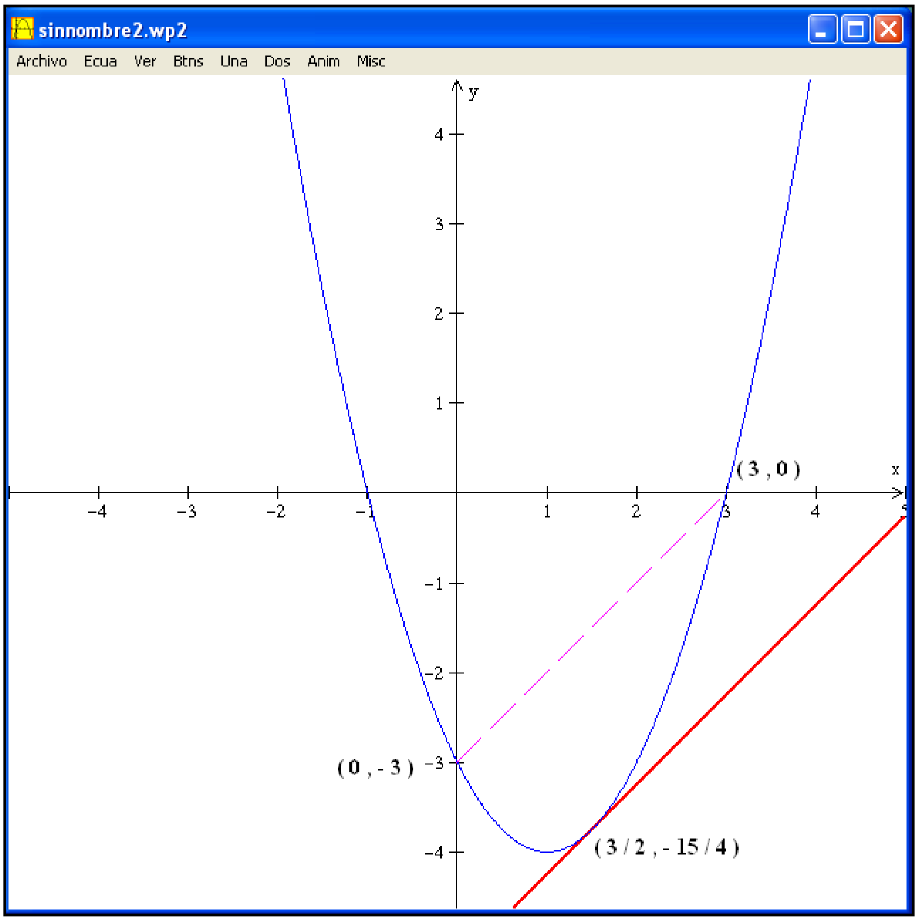
$$y=x^2-2x-3 \;\to\; y'=2x-2 \xrightarrow{T.Lagrange}$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\quad c\in(a,b):\ \frac{0-(-3)}{3-0}=1=2c-2 \;\to\; c=3/2 \;\Rightarrow\; y(3/2)=-15/4$$

Luego en $M\left(3/2,-15/4\right)$ la tangente es paralela a la cuerda $\overline{AB}$. Su ecuación es:

$$y-y(c)=y'(c)(x-c) \;\to\; y+15/4=1\left(x-3/2\right) \;\Rightarrow\; 4x-4y-21=0$$

El ejercicio se ilustra con la figura.



[4.8] Hallar la derivada n-ésima de la función $y=\dfrac{4x^2-32x+49}{x^2-8x+12}$

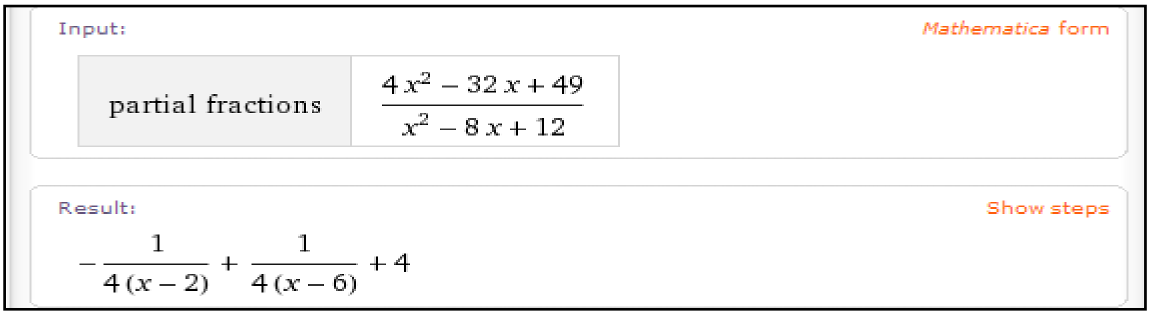
(Indicación: descomponer previamente en fracciones simples)

Solución:

$$y=\frac{4x^2-32x+49}{x^2-8x+12}=4+\frac{1}{x^2-8x+12}=4+\frac{1}{(x-2)(x-6)}$$

$$\frac{1}{(x-2)(x-6)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-6}=\frac{A(x-6)+B(x-2)}{(x-2)(x-6)}$$

$$1\equiv A(x-6)+B(x-2)\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x=6: & 1=4B\\ x=2: & 1=-4A\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}A=-1/4\\ B=1/4\end{cases}$$



Por lo tanto: $y^{(n)}=0-\dfrac{1}{4}D^n\left[\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-6}\right]$

Consideremos la función $g=\dfrac{1}{x-a}=(x-a)^{-1}$. Derivándola sucesivamente:

$$\left.\begin{aligned}g'&=-(x-a)^{-2}=(-1)^1 1!(x-a)^{-2}\\ g''&=+2(x-a)^{-3}=(-1)^2 2!(x-a)^{-3}\\ g'''&=-6(x-a)^{-4}=(-1)^3 3!(x-a)^{-4}\end{aligned}\right\}\quad \text{Por inducción:}\quad g^{(n)}=(-1)^n n!(x-a)^{-(n+1)}$$

Luego:

$$y^{(n)}=(-1)^{n+1}\frac{n!}{4}\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-6)^{n+1}}\right]$$

[4.9] Siendo $y = \operatorname{argth} x$, obtener una relación entre $y^{(n-2)}, y^{(n-1)}, y^{(n)}$. Calcular $y'''(0)$.

Solución:

Derivando: $y = \operatorname{argth} x \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{1-x^2} \quad \Rightarrow \quad (1-x^2)y' = 1$

Aplicando el operador D (n-1) veces y teniendo en cuenta la regla de Leibniz:

$$D^{n-1}\left[(1-x^2)y'\right] = D^{n-1}[1] \quad \Rightarrow \quad D^{n-1}\left[(1-x^2)y'\right] = 0$$

$$\binom{n-1}{0}(y')^{(n-1)}(1-x^2) - \binom{n-1}{1}(y')^{(n-2)}2x - \binom{n-1}{2}(y')^{(n-3)}2 = 0$$

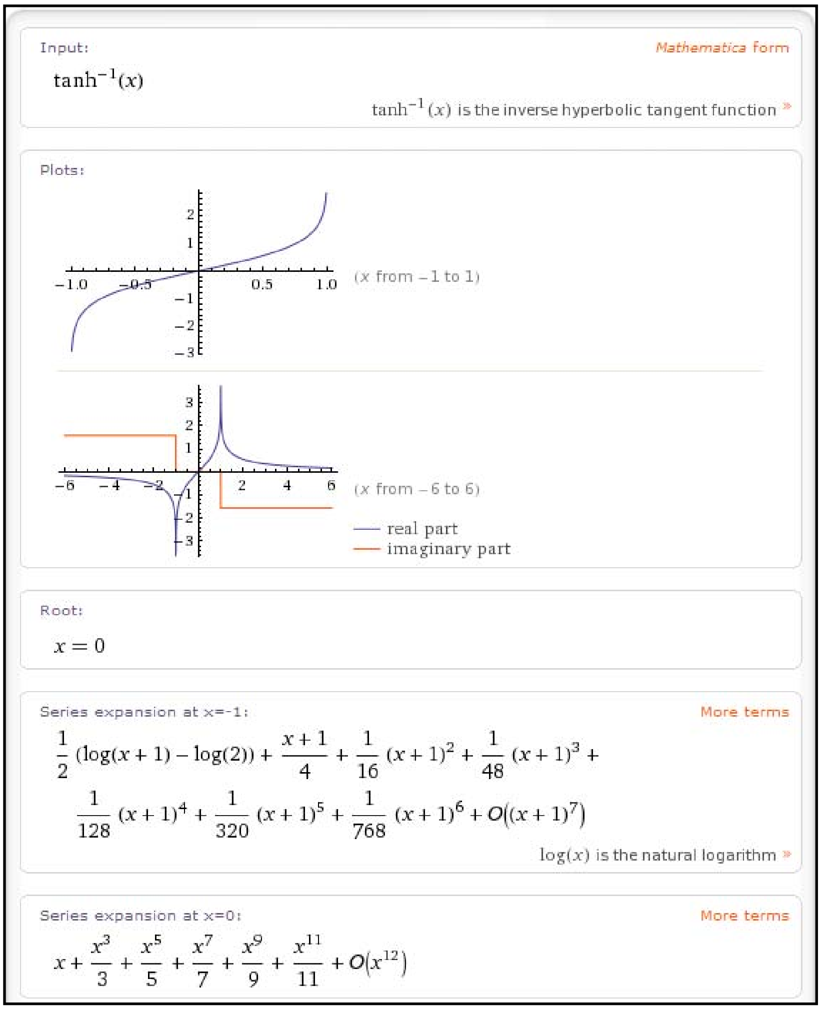
La fórmula de recurrencia pedida es:

$$(1-x^2)y^{(n)} - 2x(n-1)y^{(n-1)} - (n-1)(n-2)y^{(n-2)} = 0$$

Con $x = 0$ se tiene:

$$y^{(n)}(0) - (n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0) = 0 \Rightarrow y^{(n)}(0) = (n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0)$$

Para $n = 3$: $y'''(0) = 2y'(0) = 2$



[4.10] Para la función $y = \dfrac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}$ se pide:

a) Determinar su dominio de definición.

b) Probar que satisface a la ecuación diferencial $\left(x^2+1\right)y' + xy - 1 = 0$

c) Demostrar la relación recurrente entre las derivadas $y^{(n+1)}, y^{(n)}, y^{(n-1)}$:

$$\left(x^2+1\right)y^{(n+1)} + (2n+1)xy^{(n)} + n^2 y^{(n-1)} = 0$$

d) Aplicar la relación anterior para calcular las primeras derivadas de y en $x=0$

e) Justificar la aproximación: $y = x - \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{8x^5}{15} - \cdots$

Solución:

a) Dominio de definición

$$x+\sqrt{x^2+1} > 0 \wedge x^2+1 \neq 0 \quad \text{se cumple} \quad \forall x \in R \quad \to \quad D = R$$

b) Probar que satisface a la ecuación diferencial $\left(x^2+1\right)y' + xy - 1 = 0$

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \xrightarrow{D} \frac{xy}{\sqrt{x^2+1}} + \left(\sqrt{x^2+1}\right)y' = \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow$$

$$\left(x^2+1\right)y' + xy - 1 = 0$$

c) Relación recurrente entre las derivadas $y^{(n+1)}, y^{(n)}, y^{(n-1)}$:

Se deriva (n) veces la ecuación diferencial. De acuerdo con la fórmula de Leibniz:

$$\binom{n}{0}y^{(n+1)}\left(x^2+1\right) + \binom{n}{1}y^{(n)}\left(2x\right) + \binom{n}{2}y^{(n-1)}\left(2\right) + \binom{n}{0}y^{(n)}\left(x\right) + \binom{n}{1}y^{(n-1)}\left(1\right) = 0 \quad \to$$

$$\left(x^2+1\right)y^{(n+1)} + 2nxy^{(n)} + n(n-1)y^{(n-1)} + xy^{(n)} + ny^{(n-1)} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(x^2+1\right)y^{(n+1)} + 2(n+1)x\,y^{(n)} + n^2 y^{(n-1)} = 0$$

d) Cálculo de las primeras derivadas de y en $x=0$

Para $x=0$: $y^{(n+1)}(0)++n^2 y^{(n-1)}(0)=0$. Además: $y(0)=0$; $y'(0)=1$

Dando valores a (n) en la relación recurrente:

$$n=1 \quad \rightarrow \quad y''(0)+y(0)=0 \quad \rightarrow \quad y''(0)=0$$

$$n=2 \quad \rightarrow \quad y'''(0)+4y'(0)=0 \quad \rightarrow \quad y'''(0)=-4$$

$$n=3 \quad \rightarrow \quad y^{IV}(0)+9y''(0)=0 \quad \rightarrow \quad y^{IV}(0)=0$$

$$n=4 \quad \rightarrow \quad y^{V}(0)+16y'''(0)=0 \quad \rightarrow \quad y^{V}(0)=64$$

....

e) Basta aplicar la fórmula de Maclaurin

$$y=y(0)+\frac{x}{1!}y'(0)+\frac{x^2}{2!}y''(0)+\frac{x^3}{3!}y'''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}y^{(n)}(0)+R_{n+1} \quad \rightarrow$$

$$y=x-\frac{4}{3!}x^3+\frac{64}{5!}x^5-\cdots \quad \Rightarrow \quad y=x-\frac{2}{3}x^3+\frac{8}{15}x^5-\cdots$$

Input: *Mathematica form*

$$\frac{\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}$$

$\log(x)$ is the natural logarithm »

Alternate form:

$$\frac{\sinh^{-1}(x)}{\sqrt{x^2+1}}$$

$\sinh^{-1}(x)$ is the inverse hyperbolic sine function »

Series expansion at x=0: More terms

$$x-\frac{2x^3}{3}+\frac{8x^5}{15}-\frac{16x^7}{35}+\frac{128x^9}{315}-\frac{256x^{11}}{693}+O\left(x^{12}\right)$$

[4.11] a) Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la función: $y = \ln\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

paralelas a la recta $x - 4y + 1 = 0$

b) Desarrollar en potencias de $(x-1)$ el polinomio $P(x) = x^4 - 1$

Solución:

a) $y = \ln\sqrt{\dfrac{x}{x+1}} = \dfrac{1}{2}\left[\ln x - \ln(x+1)\right] \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}\right] = \dfrac{x+1-x}{2x(x+1)} = \dfrac{1}{2x(x+1)}$

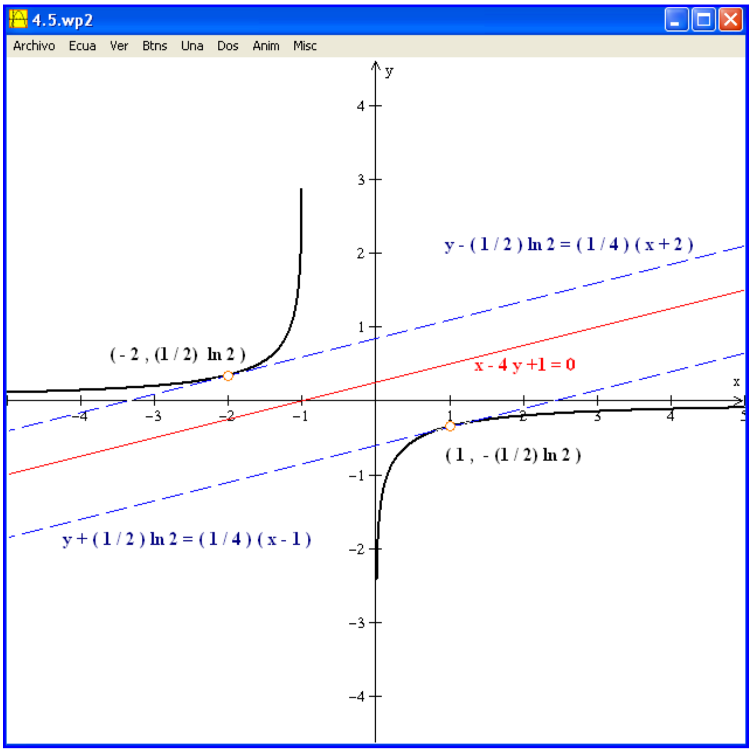
$$x - 4y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \Rightarrow m_2 = \frac{1}{4}$$

Como las rectas tangentes a la función deben ser paralelas a esa recta de pendiente m_2, se tiene:

$$m_1 = m_2 \Rightarrow \frac{1}{2x(x+1)} = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 & \rightarrow \quad y = -\dfrac{1}{2}\ln 2 \\ -2 & \rightarrow \quad y = +\dfrac{1}{2}\ln 2 \end{cases}$$

Luego las dos rectas tangentes tienen de ecuaciones: $\begin{cases} y + \dfrac{1}{2}\ln 2 = \dfrac{1}{4}(x-1) \\ y - \dfrac{1}{2}\ln 2 = \dfrac{1}{4}(x+2) \end{cases}$



b) Se aplica la fórmula de Taylor para polinomios (en este caso $n=4$):

$$P(x)=P(1)+\frac{P'(1)}{1!}(x-1)+\frac{P''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{P'''(1)}{3!}(x-1)^3+\frac{P^{IV}(1)}{4!}(x-1)^4$$

$$\begin{array}{rcl} P(x)=x^4-1 & \rightarrow & P(1)=0 \\ P'(x)=4x^3 & \rightarrow & P'(1)=4 \\ P''(x)=12x^2 & \rightarrow & P''(1)=12 \\ P'''(x)=24x & \rightarrow & P'''(1)=24 \\ P^{IV}(x)=24 & \rightarrow & P^{IV}(1)=24 \end{array}$$

$$x^4-1=0+\frac{4}{1!}(x-1)+\frac{12}{2!}(x-1)^2+\frac{24}{3!}(x-1)^3+\frac{24}{4!}(x-1)^4=4(x-1)+6(x-1)^2+4(x-1)^3+(x-1)^4$$

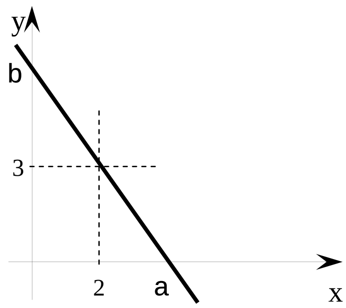
[4.12] Determinar la recta que pasa por el punto $(2,3)$ y forma con los ejes coordenados un triángulo de área mínima.

Solución:

Ecuación canónica de la recta: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

Por pasar por el punto $(2,3)$: $\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b}=1$

$$\frac{2b+3a}{ab}=1 \;\Rightarrow\; 2b=ab-3a=a(b-3) \;\Rightarrow\; a=\frac{2b}{b-3}$$



$$A=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\cdot\frac{2b}{b-3}\cdot b=\frac{b^2}{b-3} \;\Rightarrow\; A'(b)=\frac{2b(b-3)-b^2}{(b-3)^2}=\frac{b^2-6b}{(b-3)^2}$$

Puntos críticos: $\begin{cases} A'=0 \;\Rightarrow\; b^2-6b=0 \;\Rightarrow\; b(b-6)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} b=0 \\ b=6 \end{cases} \\ \nexists\, A' \;\Rightarrow\; b-3=0 \;\Rightarrow\; b=3 \end{cases}$

Dos de esos puntos críticos ($b=0$ y $b=3$) se desechan por consideraciones geométricas. Vamos analizar el único punto crítico restante mediante el criterio de la variación de la primera derivada:

$$\begin{cases} \forall b\in(3,6): \quad A'(b)=\dfrac{(+)(-)}{(+)}=(-) \searrow \text{ (decrec.)} \\ \forall b\in(6,\infty): \quad A'(b)=\dfrac{(+)(+)}{(+)}=(+) \nearrow \text{ (crec.)} \end{cases}$$

[Mínimo en $b=6$; $a=4$]

Luego la ecuación de la recta pedida es: $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{6}=1$

[4.13] Hallar los puntos críticos y los extremos locales de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{|x|}{1+|x|}$

b) $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Solución:

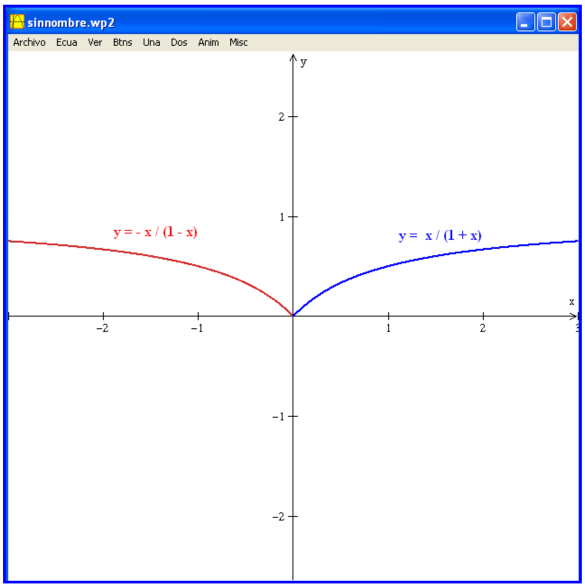
a) Podemos expresar $f(x)=\dfrac{|x|}{1+|x|}=\begin{cases}\dfrac{-x}{1-x} & x\le 0\\ \dfrac{x}{1+x} & x>0\end{cases}$

Se obtiene para la derivada: $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-(1-x)-x}{(1-x)^2}=\dfrac{-1}{(1-x)^2} & x<0\\ \nexists & x=0\\ \dfrac{1+x-x}{(1+x)^2}=\dfrac{1}{(1+x)^2} & x>0\end{cases}$

No hay más puntos críticos que el (0,0) puesto que $f'(x)\neq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Como: $\begin{cases} f'(x)<0 \quad si \quad x<0 \quad \Rightarrow \quad f \quad \text{es decreciente en } (-\infty,0)\\ f'(x)>0 \quad si \quad x>0 \quad \Rightarrow \quad f \quad \text{es creciente} \quad \text{en } (0,+\infty)\end{cases}$

y como f es una función continua en $\mathbb{R}$ podemos decir que en el punto $(0,0)$ hay un mínimo absoluto.

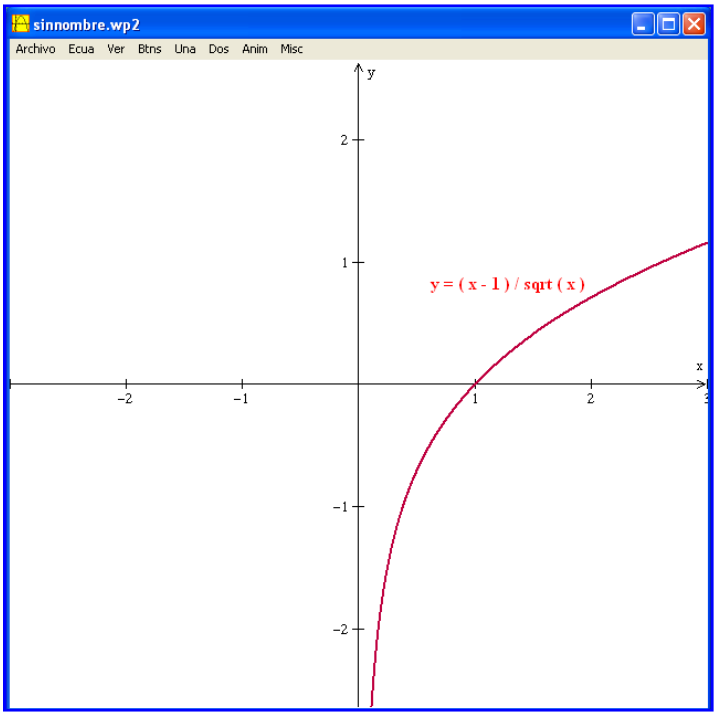


b) $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$ $\qquad$ $D(f)=(0,+\infty)$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x}-(x-1)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2x-x+1}{2x\sqrt{x}}=\frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$$

$f'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad x=-1\notin D \quad\Rightarrow$ No hay puntos críticos

Y como $f'(x)>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}^+ \quad\Rightarrow$ la función no tiene extremos



[4.14] Hallar los puntos críticos y clasificar los extremos absolutos de la función: $f(x)=x^2-2|x|+2$ en el intervalo $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$

Solución:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x+2 & \text{si} \quad x\le 0 \\ x^2-2x+2 & \text{si} \quad x>0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{si} \quad x<0 \\ \nexists & \quad x=0 \\ 2x-2 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}$$

Como $x=-1\notin\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$, los puntos críticos son $x=0$ y $x=1$

Estudiamos ahora el signo de la derivada primera

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & -\dfrac{1}{2} < x < 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ creciente } \nearrow \\ f'(x) < 0 & 0 < x < 1 \quad \Rightarrow \quad f \text{ decreciente } \searrow \\ f'(x) > 0 & 1 < x < \dfrac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad f \text{ creciente } \nearrow \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que f es continua y estudiando los valores en los extremos del intervalo se tiene que:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}, \quad y = \dfrac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{4}\right) \quad \text{mínimo local} \\ x = \dfrac{3}{2}, \quad y = \dfrac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{4}\right) \quad \text{máximo local} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0, \quad y = 2 \quad \Rightarrow \quad (0,2) \quad \text{máximo absoluto} \\ x = 1, \quad y = 1 \quad \Rightarrow \quad (1,1) \quad \text{mínimo absoluto} \end{cases}$$