DOMINIOS DE DEFINICIÓN

[3.1] Obtener el dominio de la función $y = \ln(x^2 - x)$

Solución:

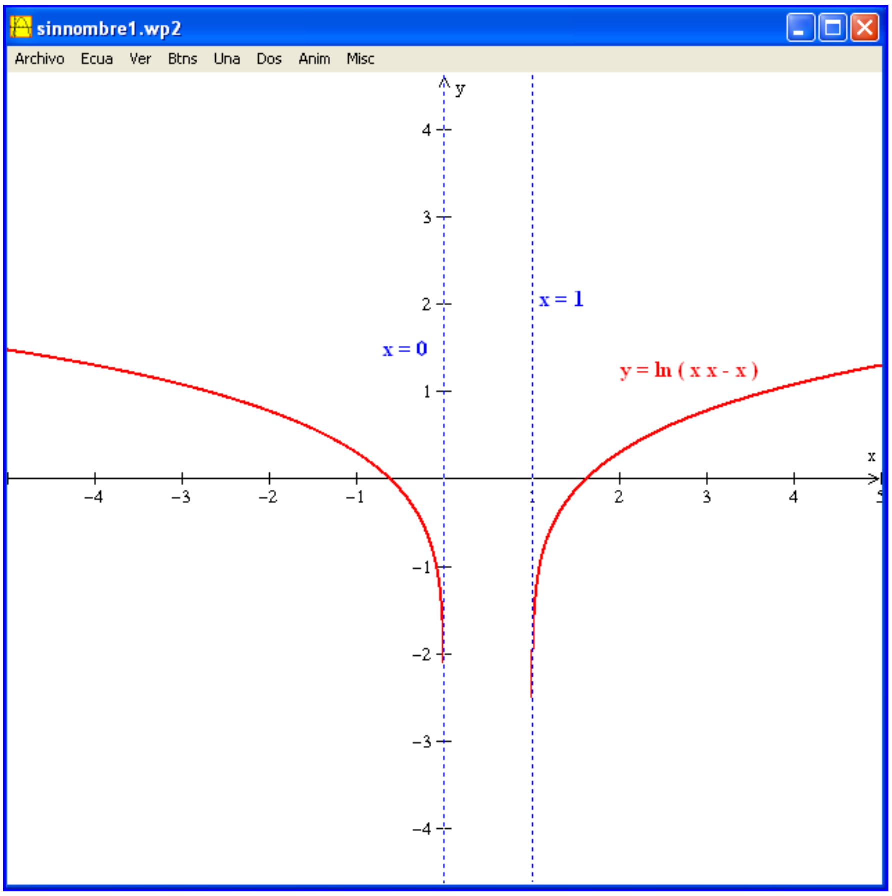
Para la existencia del logaritmo se debe cumplir: $x^2 - x > 0$.

Por tanto:

$$x^2 - x > 0 \Leftrightarrow x(x-1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \ \wedge \ x-1 > 0 \\ \qquad \vee \\ x < 0 \ \wedge \ x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \vee \\ x < 0 \end{cases}$$

Por consiguiente:

$$D = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$



[3.2] Obtener el dominio de la función $y = \operatorname{arcsen} \frac{2x}{x^2+1}$

Solución:

Para la existencia de la función se debe cumplir: $\left| \frac{2x}{x^2+1} \right| \le 1$.

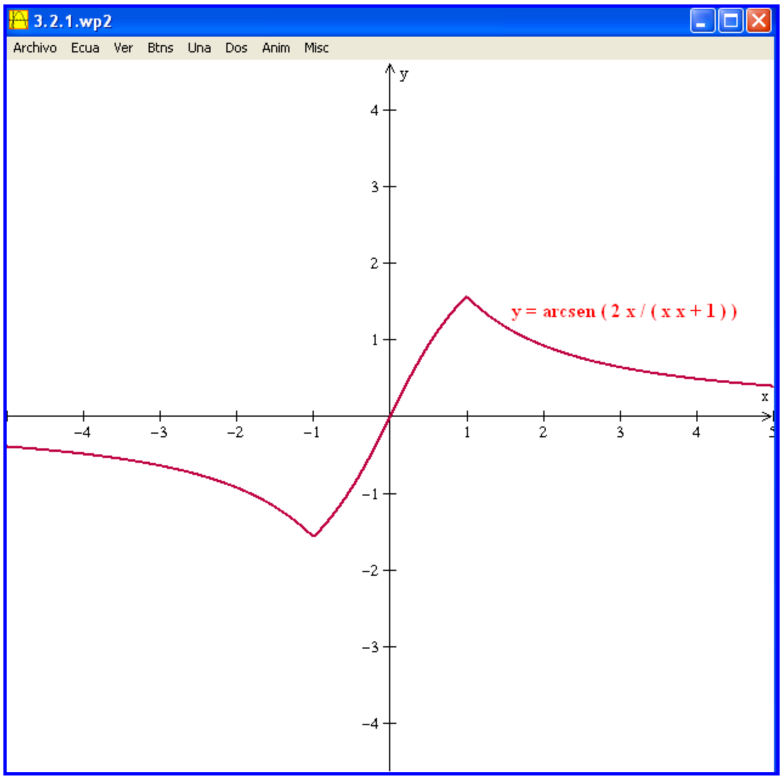
Por tanto:

$$\left| \frac{2x}{x^2+1} \right| \le 1 \iff -1 \le \frac{2x}{x^2+1} \le 1 \iff -x^2 - 1 \le 2x \le x^2 + 1 \iff$$

$$\begin{cases} -x^2 - 1 \le 2x \iff 0 \le x^2 + 1 + 2x = (x+1)^2 \quad \text{Cierto siempre} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \wedge \\ 2x \le x^2 + 1 \iff 0 \le x^2 + 1 - 2x = (x-1)^2 \quad \text{Cierto siempre} \end{cases}$$

En definitiva:

$$D = \mathbb{R}$$



[3.3] Obtener y representar el dominio de la función $z = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)(x+y)}$

Solución:

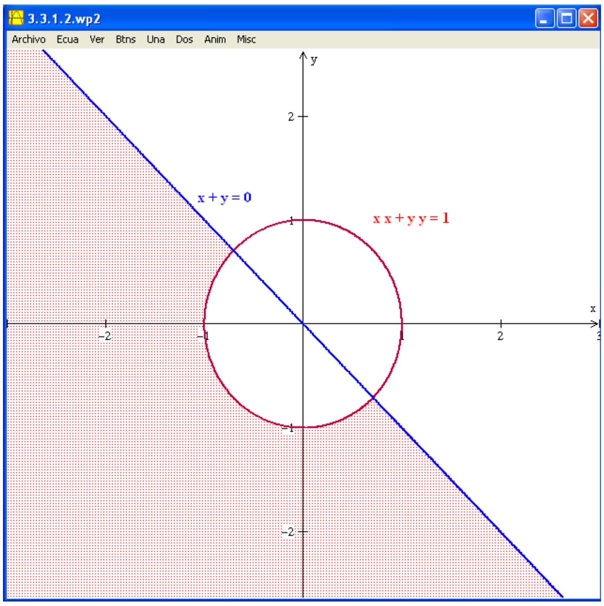
Para la existencia de la raíz cuadrada: $(1 - x^2 - y^2)(x+y) \ge 0.$

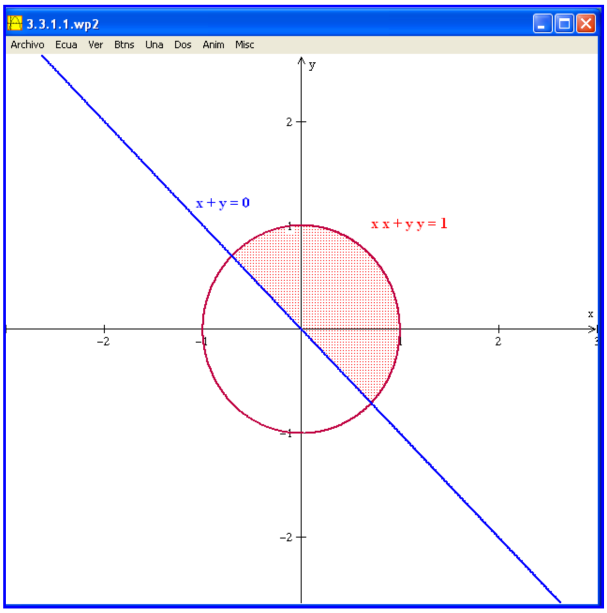
Por tanto:

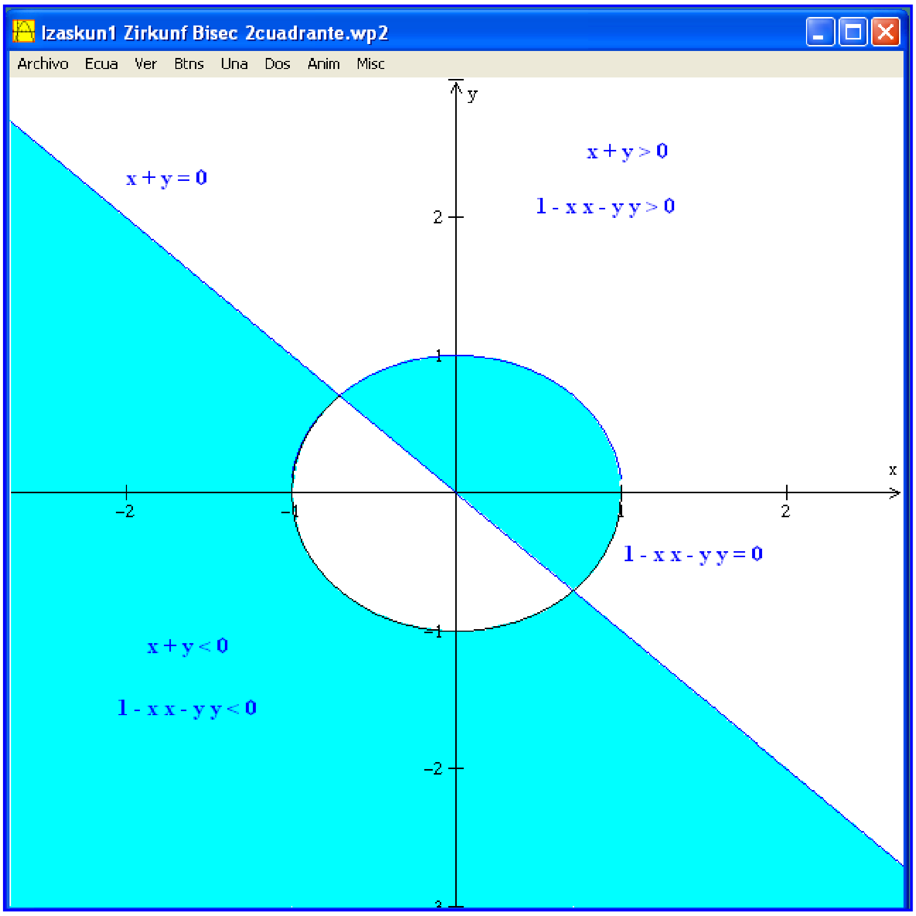
$$\left(1-x^2-y^2\right)\left(x+y\right)\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2-y^2\geq 0 \ \wedge \ x+y\geq 0 \\ \vee \\ 1-x^2-y^2\leq 0 \ \wedge \ x+y\leq 0 \end{cases}$$

En definitiva:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\geq 1 \ \wedge \ y\leq -x\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\leq 1 \ \wedge \ y\geq -x\right\}$$







[3.4] Obtener y representar el dominio de la función $z=\dfrac{\ln(\operatorname{sen}(\pi x))}{\sqrt{y-1}}$

Solución:

Para la existencia del denominador: $y-1>0 \Leftrightarrow y>1$

Para la existencia del numerador: $\operatorname{sen}(\pi x)>0$

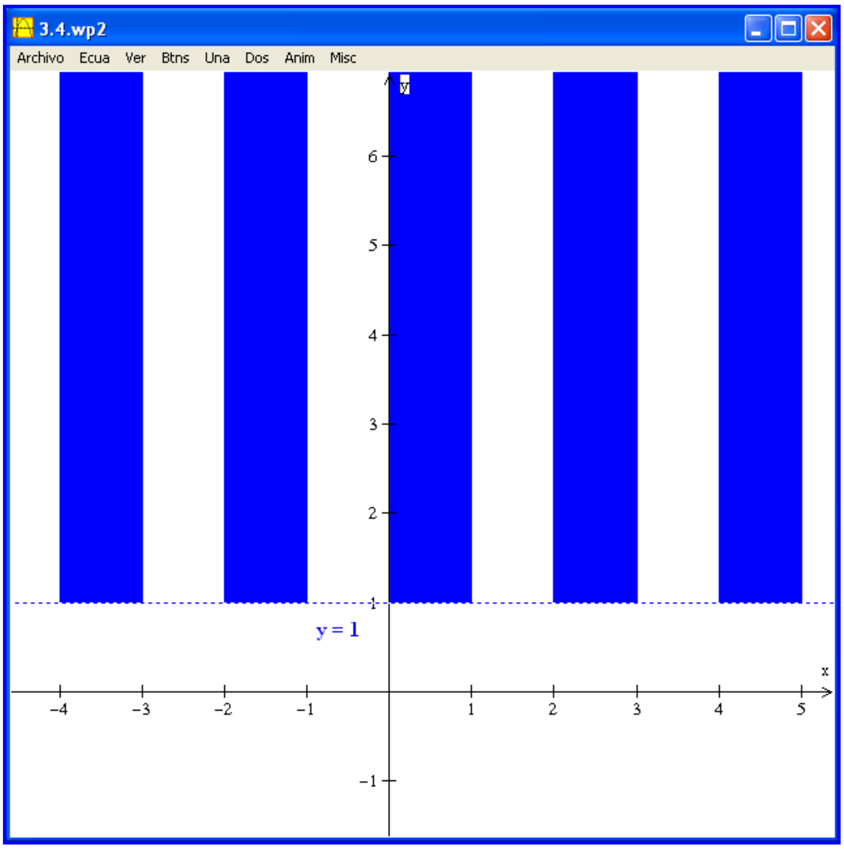
Por consiguiente:

$$\operatorname{sen}(\pi x)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} \pi x\in\left(2k\pi,(2k+1)\pi\right)\Leftrightarrow x\in\left(2k,2k+1\right) \quad \forall k\in\{0,1,2,3,\ldots\} \\ \vee \\ \pi x\in\left(-2k\pi,-(2k-1)\pi\right)\Leftrightarrow x\in\left(-2k,-(2k-1)\right) \quad \forall k\in\{1,2,3,\ldots\} \end{cases}$$

En definitiva:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \left\{y>1 \ \wedge \ x\in\left(2k,2k+1\right)\forall k\in\{0,1,2,3,\ldots\}\right\}\cup\right.$$

$$\left.\cup\left\{y>1 \ \wedge \ \left(-2k,-(2k-1)\right)\forall k\in\{1,2,3,\ldots\}\right\}\right\}$$



[3.5] Obtener y representar el dominio de la función $z = \dfrac{\arg\text{ch}(xy)}{\sqrt{e^{x+y}-1}}$

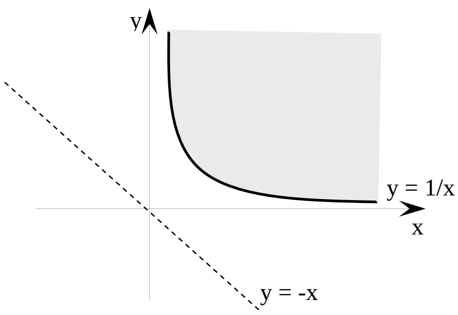
Solución:

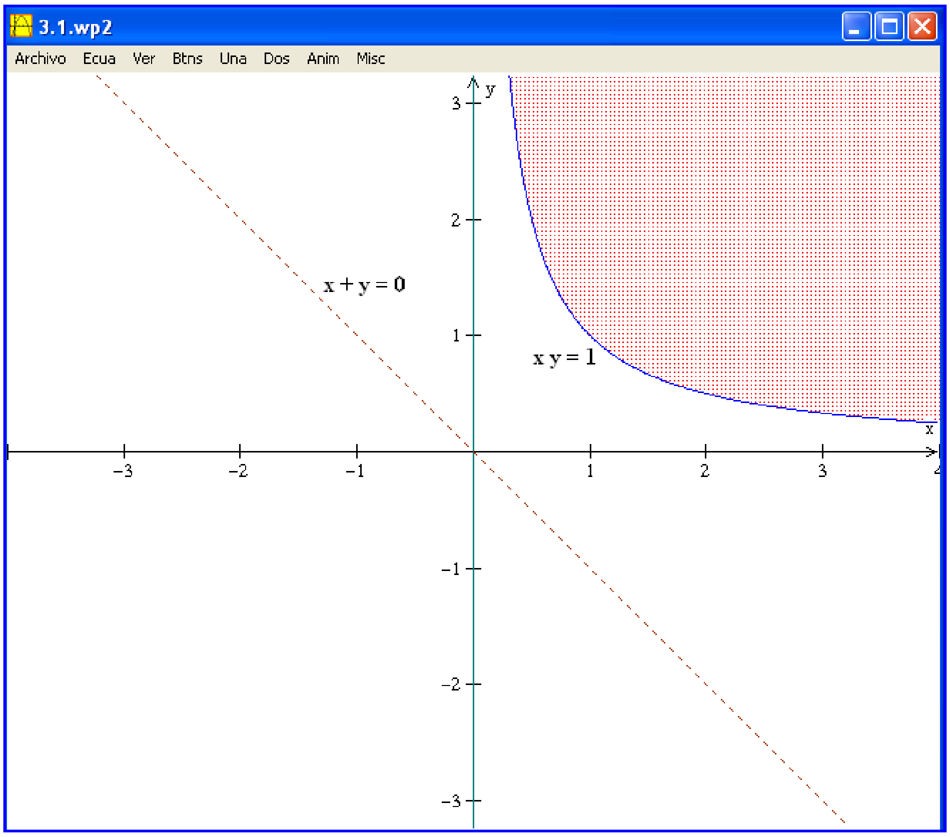
Para la existencia del denominador debe ser $e^{x+y}-1>0 \quad \Rightarrow \quad x+y>0$.

Es decir, el semiplano superior limitado por la bisectriz del 2º y 4º cuadrantes.

La existencia del numerador requiere que $xy \geq 1$. Por consiguiente:

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, (\,y \geq 1/x\,)\wedge(\,x>0\,)\wedge(\,y>0\,)\right\}$$





[3.6] Obtener y representar el dominio de la función $f(x,y)=\dfrac{\exp\left(\dfrac{1}{\ln x+\ln y}\right)}{x^2-y^2}$

Solución:

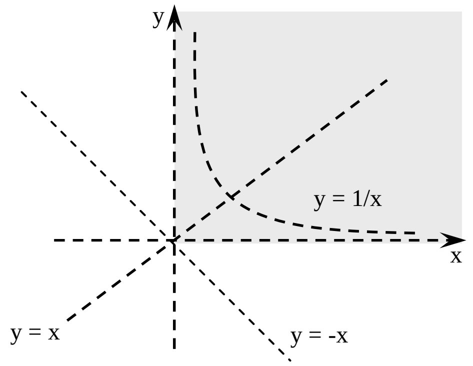
$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x^2-y^2\neq 0)\wedge(\ln x+\ln y\neq 0)\wedge(x>0)\wedge(y>0)\right\}$$

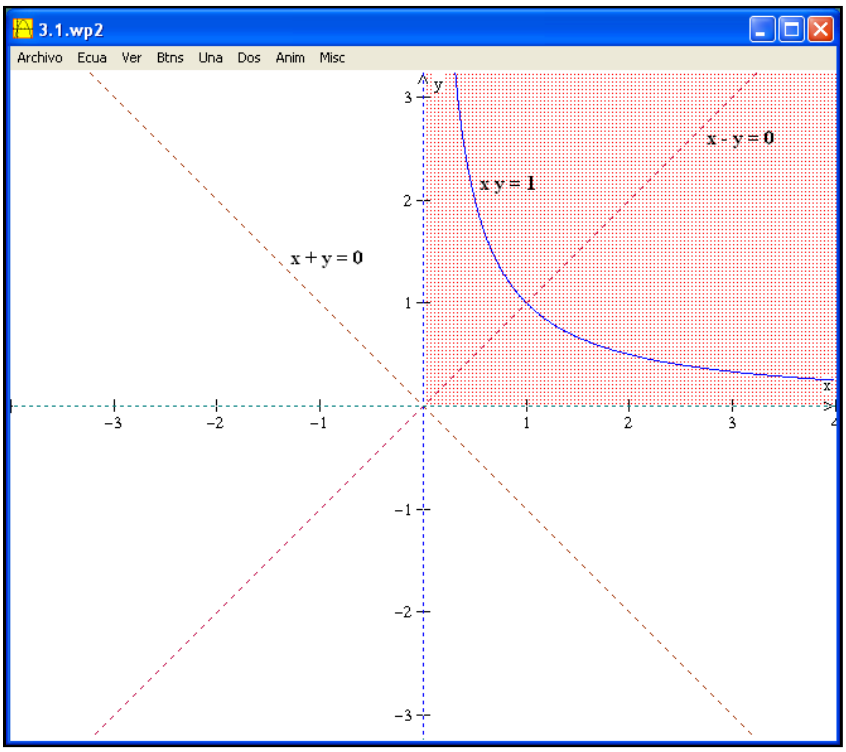
$$x^2-y^2=0 \;\Rightarrow\; (x+y)(x-y)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} y=x \\ y=-x \end{cases}$$

$$\ln x+\ln y=0 \;\Rightarrow\; \ln(xy)=0 \;\Rightarrow\; xy=1$$

Luego el dominio está constituido por los puntos del primer cuadrante ($x>0$, $y>0$), excluidos los de la recta $y=x$ y los de la hipérbola $y=1/x$ que pertenecen a dicho cuadrante.

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x+y\neq 0)\wedge(x-y\neq 0)\wedge(xy\neq 1)\wedge(x>0)\wedge(y>0)\right\}$$





[3.7] Obtener y representar el dominio de la función:

$$f(x,y) = \ln\left[\left(9 - x^2 - y^2\right)\left(y^2 - x + 3\right)\right]$$

Solución:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(9 - x^2 - y^2\right)\left(y^2 - x + 3\right) > 0\right\}$$

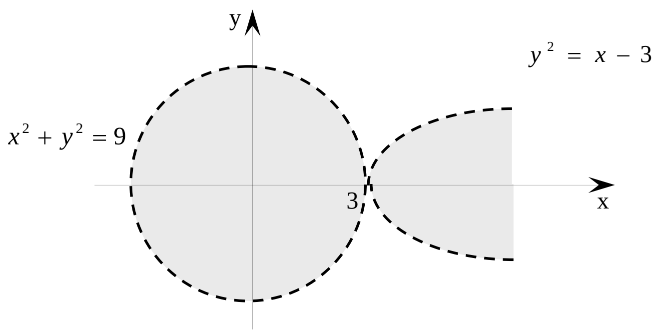
$$\left(9 - x^2 - y^2\right)\left(y^2 - x + 3\right) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \begin{Bmatrix} 9 - x^2 - y^2 > 0 \\ y^2 - x + 3 > 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 < 9 \\ y^2 > x - 3 \end{cases} & [1] \\ \qquad\qquad \vee & \\ \begin{Bmatrix} 9 - x^2 - y^2 < 0 \\ y^2 - x + 3 < 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 > 9 \\ y^2 < x - 3 \end{cases} & [2] \end{cases}$$

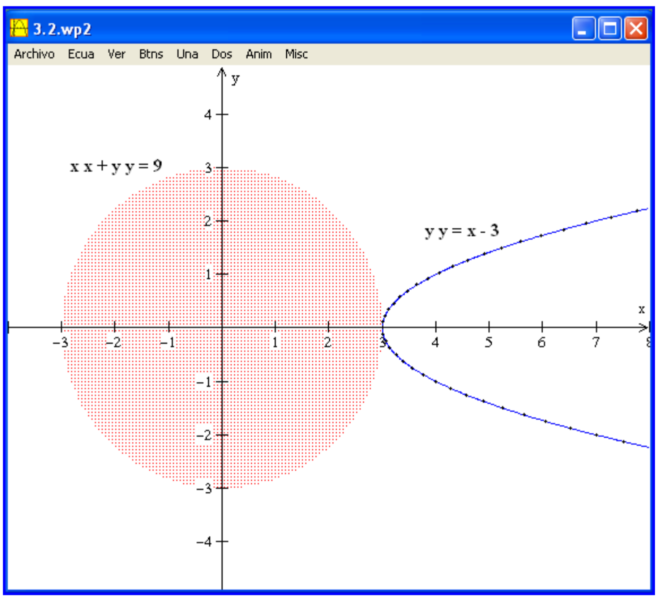
Las condiciones [1] indican el interior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ (centrada en el origen y de radio 3).

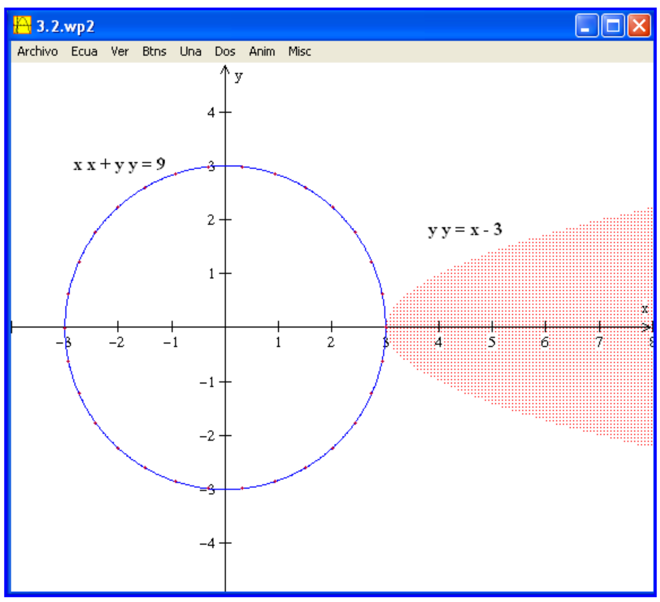
Las condiciones [2] expresan el interior de la parábola $y^2 = x - 3$.

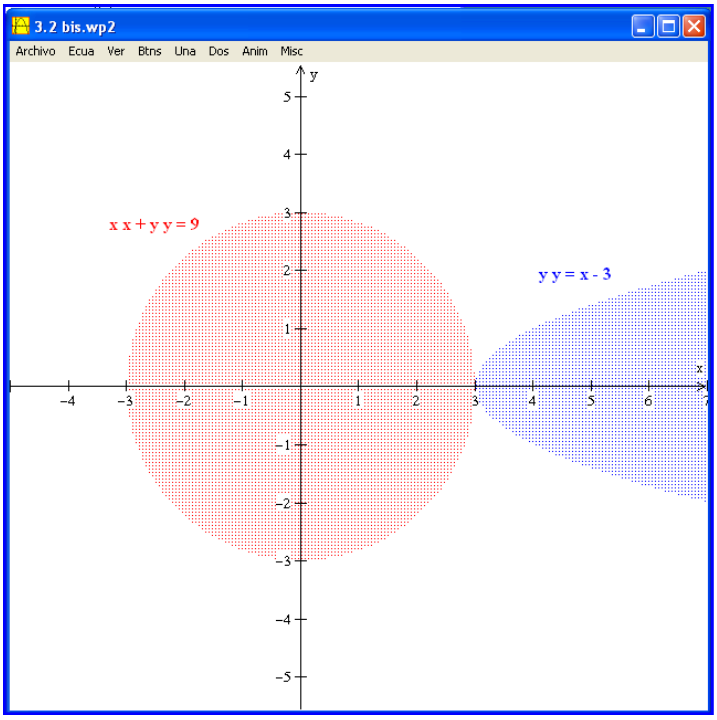
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left\{(x^2 + y^2 < 9) \wedge (y^2 > x - 3)\right\} \vee \left\{(x^2 + y^2 > 9) \wedge (y^2 < x - 3)\right\}\right\}$$

Luego el dominio de definición pedido es el indicado en la figura.









[3.8] Obtener y representar el dominio de la función:

$$f(x,y)=\frac{\operatorname{arcsen}(1-x^2-2y^2)}{\ln(y^2-x)}$$

Solución:

Para la existencia del arco seno:

$$-1\le 1-x^2-2y^2\le 1 \quad\Rightarrow\quad 0\le x^2+2y^2\le 2$$

$$\begin{cases} x^2+2y^2=0 \quad\Rightarrow\quad x=y=0 \\ x^2+2y^2>0 \quad\Rightarrow\quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \\ x^2+2y^2=2 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{1}=1 \quad\to\quad \text{elipse} \begin{cases} a=\sqrt{2} \\ b=1 \end{cases} \\ x^2+2y^2<2 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{1}<1 \quad\to\quad \text{interior de la elipse} \end{cases}$$

Para la existencia del logaritmo neperiano:

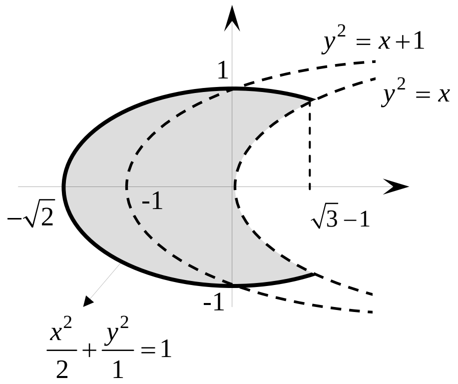
$$y^2-x>0 \quad\Rightarrow\quad y^2>x \quad \text{(exterior de la parábola)}$$

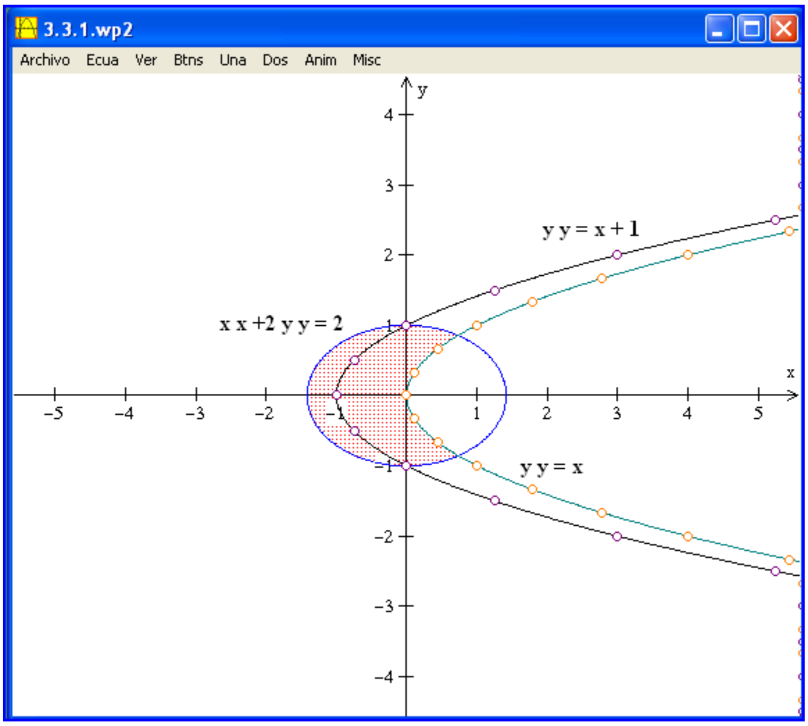
Para que no se anule el denominador:

$y^2-x\ne 1 \quad\Rightarrow\quad y^2\ne x+1$ (los puntos de esa otra parábola con vértice en (-1,0) están excluidos).

Por lo tanto:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,(0\le x^2+2y^2\le 2)\wedge(y^2>x)\wedge(y^2\ne x+1)\right\}$$





[3.9] Obtener y representar el dominio de la función:

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$$

Solución:

Las condiciones que deben cumplirse para que la función tome valores reales son:

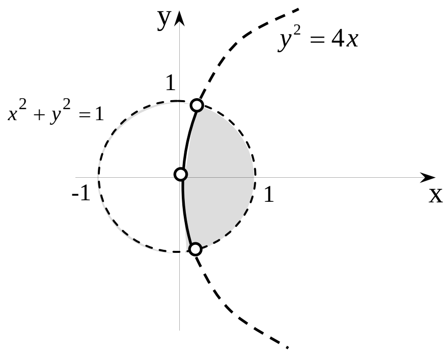
$4x-y^2\ge 0 \quad\Rightarrow\quad y^2\le 4x$ [interior o sobre la parábola]

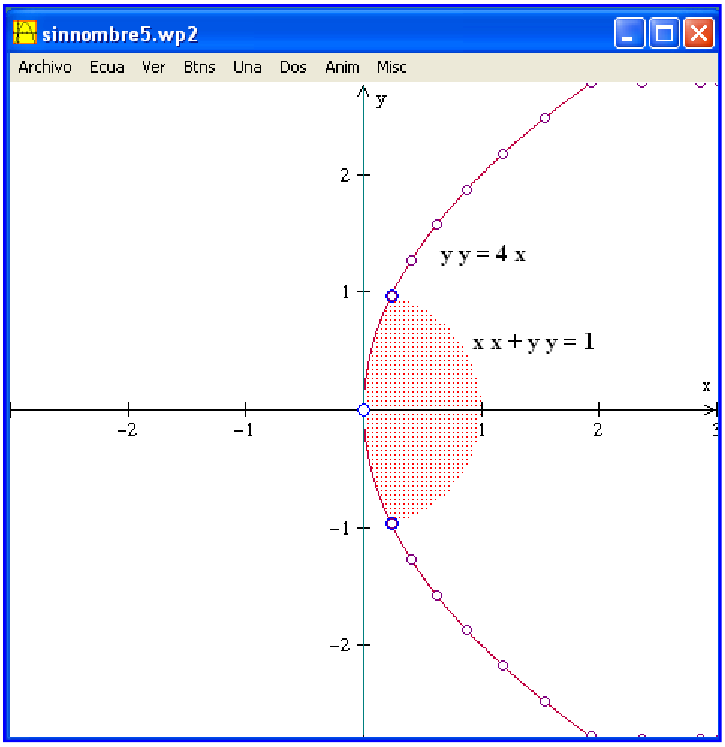
$1-x^2-y^2>0 \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2<1$ [interior de la circunferencia]

$$1-x^2-y^2 \neq 1 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 0 \quad \wedge \quad y \neq 0$$ [se excluye el origen]

Por lo tanto, la expresión analítica del dominio de definición es:

$$D(f)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, (y^2 \leq 4x)\wedge(x^2+y^2<1)\wedge(x\neq 0 \wedge y\neq 0)\right\}$$





[3.10] Obtener y representar el dominio de la función:

$$f(x,y)=\ln\left(\frac{5-x^2-y^2-4y}{x^2-y-4}\right)$$

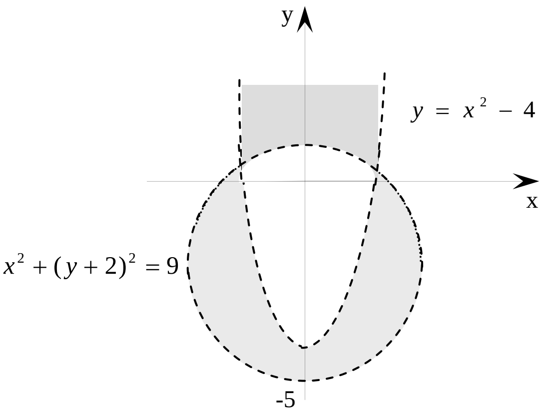
Solución:

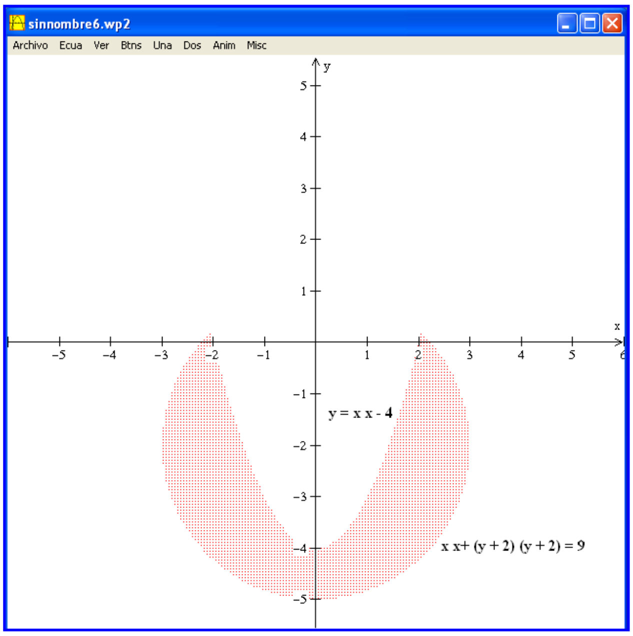
$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \frac{5-x^2-y^2-4y}{x^2-y-4}>0\right\}$$

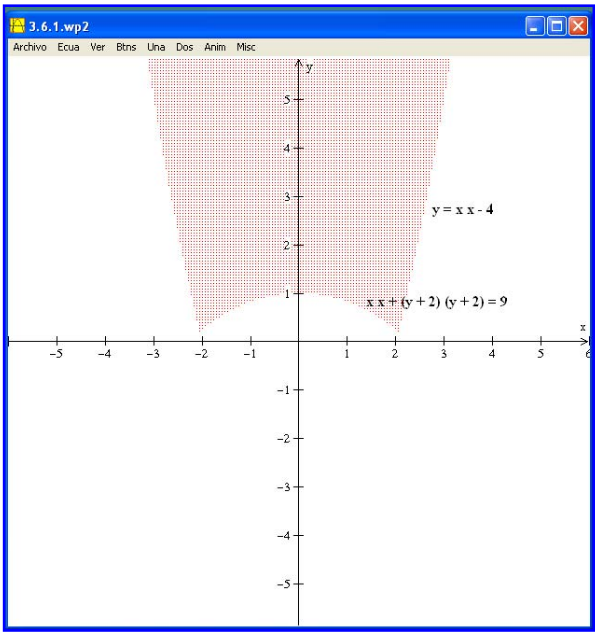
$$\frac{5-x^2-y^2-4y}{x^2-y-4}>0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{c} 5-x^2-y^2-4y>0 \\ x^2-y-4>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2+(y+2)^2<9 \\ x^2-4>y \end{array}\right. \\ \qquad\qquad \vee \\ \left\{\begin{array}{c} 5-x^2-y^2-4y<0 \\ x^2-y-4<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2+(y+2)^2>9 \\ x^2-4<y \end{array}\right. \end{array}\right.$$

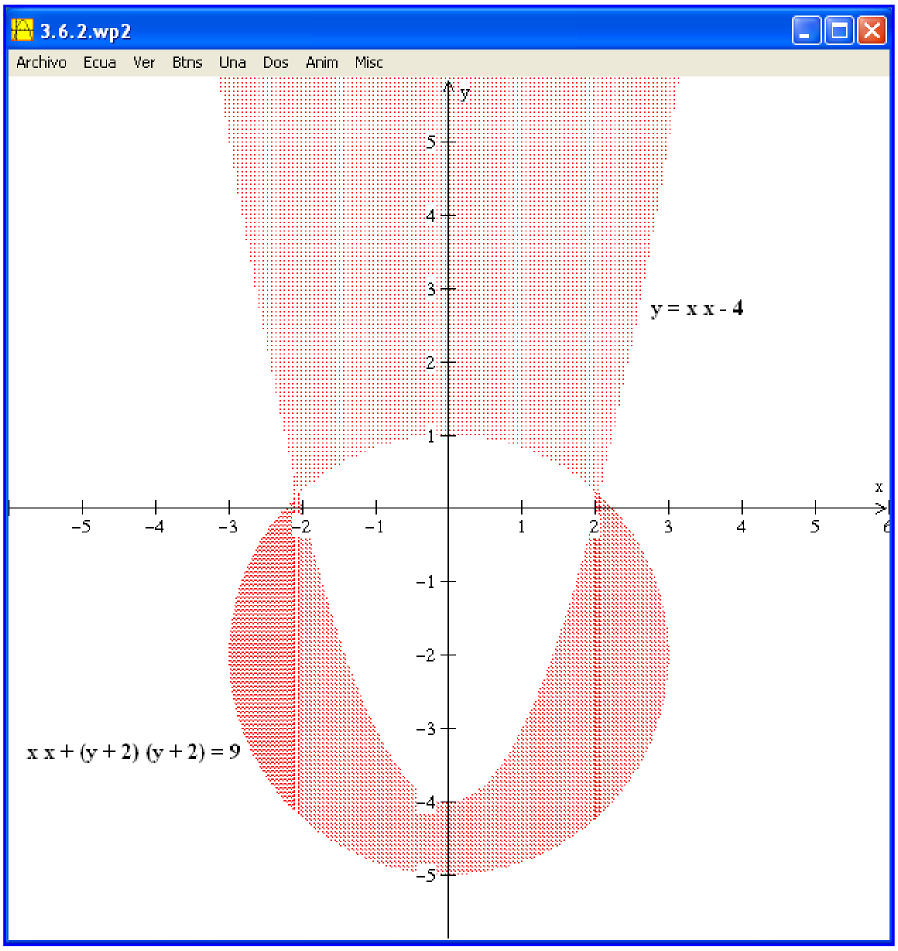
$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \left\{(x^2+(y+2)^2<9)\wedge(x^2-4>y)\right\}\vee\left\{(x^2+(y+2)^2>9)\wedge(x^2-4<y)\right\}\right\}$$

Luego el dominio de definición pedido es el indicado en la figura:








3.6.2.wp2
Archivo Ecua Ver Btns Una Dos Anim Misc
y
x
y = x x - 4
x x + (y + 2) (y + 2) = 9
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5