Diseño de algoritmos

Jesús Bermúdez de Andrés. UPV-EHU

Guías para la solución de ejercicios: Notación asintótica

Curso 2008-09

1. Usando la definición de notación asintótica Θ, demuestre con detalle que $1024n^2 + 5n \in \Theta(n^2)$.

   Solución:
   Para demostrar que $1024n^2 + 5n \in O(n^2)$ hay que encontrar un n_0 y una constante $c > 0$ tal que $1024n^2 + 5n \leq cn^2 \ \forall n \geq n_0$.

   Basta dividir esa inecuación por n^2 para obtener $1024 + \frac{5}{n} \leq c$. Por lo tanto, basta tomar $n_0 = 5$ y $c = 1025$.

   Para demostrar que $1024n^2 + 5n \in \Omega(n^2)$ hay que encontrar un n_0 y una constante $c > 0$ tal que $1024n^2 + 5n \geq cn^2 \ \forall n \geq n_0$. Basta tomar $n_0 = 0$ y $c = 1$.

2. Usando las definiciones de notación asintótica, demuestre si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes:

   a) $(n+1)! \in O(3(n!))$
   b) $n^2 \in \Omega((n+1)^2)$

   Solución:

   a) $(n+1)! \in O(3(n!))$ es falso. Lo demostramos por reducción al absurdo. Si suponemos que es verdadero, entonces

   $$\exists c > 0, n_0 \text{ tal que } \forall n \geq n_0, (n+1)! \leq c3n!$$

   pero entonces tendríamos que $\forall n \geq n_0$, $n + 1 \leq c3$; que es imposible.

   b) $n^2 \in \Omega((n+1)^2)$ es verdadero. Intentemos justificar las acotaciones pertinentes:

   $$n^2 \geq c(n+1)^2 \Rightarrow n^2 \geq cn^2 + c2n + c \Rightarrow 1 \geq c + c2/n + c/n^2$$

   y basta tomar una constante $0 < c \leq 1/4$ para que se satisfagan las acotaciones $\forall n > 1$.

3. Demuestre las proposiciones siguientes:

   a) $g(n) \in O(f(n))$ si y sólo si $f(n) \in \Omega(g(n))$.

b) $g(n) \in o(f(n))$ si y sólo si $f(n) \in \omega(g(n))$.

c) $\Theta(f(n)) = O(f(n)) \cap \Omega(f(n))$

d) Si $g(n) \in o(f(n))$ entonces $g(n) \in O(f(n)) - \Omega(f(n))$

Solución:

a)

$$\begin{aligned} g(n) \in O(f(n)) &\Leftrightarrow \exists c > 0, n_0\ \forall n \geq n_0,\ g(n) \leq cf(n) \\ &\Leftrightarrow \exists c > 0, n_0\ \forall n \geq n_0,\ \frac{1}{c}\, g(n) \leq f(n) \\ &\Leftrightarrow f(n) \in \Omega(g(n)). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} g(n) \in o(f(n)) &\Leftrightarrow \exists n_0 \forall \epsilon > 0,\ \forall n \geq n_0,\ g(n) < \epsilon f(n) \\ &\Leftrightarrow \exists n_0 \forall \epsilon > 0,\ \forall n \geq n_0,\ \frac{1}{\epsilon} g(n) < f(n) \\ &\Leftrightarrow f(n) \in \omega(g(n)). \end{aligned}$$

c) Basta desplegar la definición de que $g(n) \in \Theta(f(n))$ para comprobar que las dos acotaciones se corresponden con las pertinentes definiciones de que $g(n) \in O(f(n))$ y $g(n) \in \Omega(f(n))$; y viceversa.

d) Si $g(n) \in o(f(n))$ entonces es obvio que $g(n) \in O(f(n))$; pero vamos a demostrar, por reducción al absurdo, que $g(n) \notin \Omega(f(n))$.

$$\begin{aligned} g(n) \in \Omega(f(n)) &\Leftrightarrow f(n) \in O(g(n)) \text{ (véase el apartado (a) anterior)} \\ &\Rightarrow \exists c > 0, n_0\ \forall n \geq n_0,\ f(n) \leq cg(n) \\ &\quad (i.e.\ \frac{1}{c}\ f(n) \leq g(n)) \end{aligned}$$

pero esto último contradice $\exists n_0\ \forall c > 0, \forall n \geq n_0,\ g(n) < cf(n)$ que es la definición de $g(n) \in o(f(n))$.

4. Demuestre que las proposiciones siguientes son equivalentes:

a) $O(f(n)) = O(g(n))$

b) $\Theta(f(n)) = \Theta(g(n))$

c) $g(n) \in \Theta(f(n))$

Solución:
Vamos a demostrar que $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$.

$(a) \Rightarrow (b)$**:** Bastará con demostrar la inclusión $\Theta(f(n)) \subseteq \Theta(g(n))$, porque $\Theta(g(n)) \subseteq \Theta(f(n))$ se demuestra de manera análoga.
$h(n) \in \Theta(f(n)) \Leftrightarrow h(n) \in O(f(n)) = O(g(n))$ y $h(n) \in \Omega(f(n))$.
$O(f(n)) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) \in O(f(n)) \Rightarrow f(n) \in \Omega(g(n))$.
$h(n) \in \Omega(f(n))$ y $f(n) \in \Omega(g(n)) \Rightarrow h(n) \in \Omega(g(n))$.
$h(n) \in O(f(n)) = O(g(n))$ y $h(n) \in \Omega(g(n)) \Rightarrow h(n) \in \Theta(g(n))$.

$(b) \Rightarrow (c)$**:** $g(n) \in \Theta(g(n)) = \Theta(f(n))$.

$(c) \Rightarrow (a)$**:** Como antes, demostramos sólo una de las inclusiones.

$g(n) \in \Theta(f(n)) \Leftrightarrow g(n) \in O(f(n))$ y $g(n) \in \Omega(f(n))$.

$h(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \in O(f(n)) \Rightarrow h(n) \in O(f(n))$.

5. Demuestre que $\lg n \in o(n^\alpha)$ para cualquier $\alpha > 0$.

Solución:
Aplicando las propiedades de los límites y la regla de L´Hôpital:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lg n}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\ln 2}}{\alpha n^{\alpha-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\alpha n^\alpha n \ln 2} = 0$$

6. Demuestre que $n^k \in o(2^n)$ para cualquier $k > 0$.

Solución:
Aplicando las propiedades de los límites y, reiteradamente, la regla de L´Hôpital:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{kn^{k-1}}{2^n \ln 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{k\cdot(k-1)\ldots 2\cdot 1}{2^n(\ln 2)^k} = 0$$

7. Justifique si son verdaderas o falsas cada una de las afirmaciones que aparecen a continuación: Por ejemplo, a la afirmación $n^2 \in O(n^3)$ y $n^2 \in \Theta(n^3)$ se debería responder *verdadero* y *falso*.

a) $\frac{n}{\lg n} \in \Theta(n)$ y $\frac{n}{\lg n} \in o(n)$
b) $\lg\lg n \in o(\lg n)$ y $\lg\lg n \in \omega(\lg n)$
c) $4^{\lg_2 n} \in O(n^2)$ y $4^{\lg_2 n} \in \Omega(n^2)$
d) Siendo $0 < \varepsilon < 1$, $n^{1+\varepsilon} \in \omega(n\lg n)$ y $n^{1+\varepsilon} \in O(n\lg n)$
e) Siendo $0 < \varepsilon < 1$, $\frac{n^2}{\lg n} \in \Theta(n^{1+\varepsilon})$ y $\frac{n^2}{\lg n} \in \omega(n^{1+\varepsilon})$
f) $(\lg n)^2 \in o(\sqrt{n})$ y $\sqrt{n} \in O((\lg n)^2)$
g) $3^n \in \Omega(2^n)$ y $3^n \in \Theta(2^n)$

Solución:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{\lg n}}{n} = 0$ por lo tanto, $\frac{n}{\lg n} \in \Theta(n)$ y $\frac{n}{\lg n} \in o(n)$ es *falso* y *verdadero*, respectivamente.
b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\lg\lg n}{\lg n} = 0$ por lo tanto, $\lg\lg n \in o(\lg n)$ y $\lg\lg n \in \omega(\lg n)$ es *verdadero* y *falso*, respectivamente.
c) $4^{\lg_2 n} = n^{\lg_2 4} = n^2$ por lo tanto, $4^{\lg_2 n} \in O(n^2)$ y $4^{\lg_2 n} \in \Omega(n^2)$ es *verdadero* y *verdadero*, respectivamente.
d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1+\varepsilon}}{n\lg n} = \infty$ por lo tanto, siendo $0 < \varepsilon < 1$, $n^{1+\varepsilon} \in \omega(n\lg n)$ y $n^{1+\varepsilon} \in O(n\lg n)$ es *verdadero* y *falso*, respectivamente.
e) $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{\lg n}}{n^{1+\varepsilon}} = \infty$ por lo tanto, $\frac{n^2}{\lg n} \in \Theta(n^{1+\varepsilon})$ y $\frac{n^2}{\lg n} \in \omega(n^{1+\varepsilon})$ es *falso* y *verdadero*, respectivamente.

f) $\text{lím}_{n\to\infty} \frac{(\lg n)^2}{\sqrt{n}} = 0$ por lo tanto, $(\lg n)^2 \in o(\sqrt{n})$ y $\sqrt{n} \in O((\lg n)^2)$ es *verdadero* y *falso*, respectivamente.

g) $\text{lím}_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^n} = \infty$ por lo tanto, $3^n \in \Omega(2^n)$ y $3^n \in \Theta(2^n)$ es *verdadero* y *falso*, respectivamente.

8. Demuestre si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: $f(n) \in O(r(n))$ y $g(n) \in O(s(n))$ implica que $\frac{f(n)}{g(n)} \in O(\frac{r(n)}{s(n)})$.

Solución:

La afirmación es falsa. Basta mostrar el siguiente contraejemplo: $3n^2 \in O(n^2)$ y $n \in O(n^2)$ pero $\frac{3n^2}{n} \notin O(1)$.

9. Una función $f : N \to R^*$ es *asintóticamente no decreciente* si $\exists n_0\ \forall n \geq n_0\ f(n) \leq f(n+1)$. Una función $f : N \to R^*$ es *b-armónica* ($b \in N\ \wedge\ b \geq 2$) si es *asintóticamente no decreciente* y la función $g(n) = f(bn)$ es de $O(f(n))$.

Demuestre que si f es *b-armónica* entonces es *k-armónica* para cualquier $k \geq 2$.

Solución:
Si $f(n)$ es *b-armónica* entonces es *asintóticamente no decreciente* y $\exists c > 0.\ \exists n_0.\ \forall n \geq n_0.\ f(bn) \leq cf(n)$.

Demostraremos la proposición haciendo inducción sobre k.

Base de la inducción: Si $k \leq b$ entonces

$$\begin{aligned} f(kn) &\leq f(bn) && (f(n) \text{ asint. no decreciente}) \\ &\leq cf(n) && (f(n) \text{ es } b-\text{armónica}) \end{aligned}$$

Hipótesis de inducción: Supongamos verdadera la proposición, para todo $k \leq l$

$$\begin{aligned} f((l+1)n) &\leq f(2ln) && (2 \leq l \Rightarrow l+1 \leq 2l)\ y\ (f(n) \text{ asint. no decreciente}) \\ &\leq c_1 f(2n) && (f(n) \text{ es } b-\text{armónica}) \\ &\leq c_1 f(bn) && (2 \leq n,\ y\ f(n) \text{ asint. no decreciente}) \\ &\leq c_1 c_2 f(n) && (f(n) \text{ es } b-\text{armónica}) \end{aligned}$$

10. Definimos una notación asintótica *condicional* del siguiente modo. Sea $P(n)$ una propiedad.

$$\begin{aligned} \Theta(f(n)|P(n)) = \{ & g(n) |\ \exists c_1, c_2.\ \exists n_0. \\ & \forall n \geq n_0.\ (P(n) \Rightarrow c_1 f(n) \leq g(n) \leq c_2 f(n))\} \end{aligned}$$

Demuestre la siguiente proposición: Si $f(n)$ es b-armónica, $t(n)$ es asintóticamente no decreciente y $t(n) \in \Theta(f(n)|\ n \textit{ potencia de } b)$ $(b \geq 2)$, entonces $t(n) \in \Theta(f(n))$.

Solución:
La hipótesis es que $\exists a, c > 0.\ \exists n_0.\ \forall n \geq n_0.\ (n \textit{ potencia de } b \Rightarrow af(n) \leq t(n) \leq cf(n))$.

Si m no es potencia de b y $m \geq n_0$ entonces $\exists i.\ b^i < m < b^{i+1}$.

Entonces:

$$
\begin{array}{rcl}
t(m) & \leq & t(b^{i+1}) \quad (t(n) \text{ asint. no decreciente}) \\
 & \leq & cf(b^{i+1}) \ = \ cf(bb^i) \quad (\text{por hipótesis}) \\
 & \leq & cdf(b^i) \quad (f(n) \text{ es } b-\text{armónica}) \\
 & \leq & cdf(m) \quad (f(n) \text{ asint. no decreciente}) \\
\text{Por otro lado :} & & \\
f(m) & \leq & f(b^{i+1}) \quad (f(n) \text{ asint. no decreciente}) \\
 & \leq & df(b^i) \quad (f(n) \text{ es } b-\text{armónica}) \\
 & \leq & d\dfrac{1}{a}t(b^i) \quad (\text{por hipótesis}) \\
 & \leq & \dfrac{d}{a}t(m) \quad (t(n) \text{ asint. no decreciente})
\end{array}
$$

En conclusión: $\exists p = cd,\ q = \frac{d}{a}.\ \exists m_0.\ \forall m \geq m_0.\ qf(m) \leq t(m) \leq pf(m))$, lo que significa que $t(m) \in \Theta(f(m))$.