Diseño de algoritmos

Notación asintótica

Jesús Bermúdez de Andrés

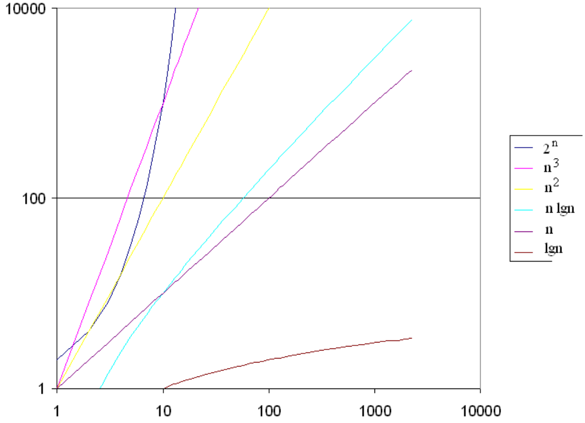
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea **(UPV/EHU)**

Curso 2008-09

1 Notación asintótica

Gráfica de las tasas de crecimiento más comunes

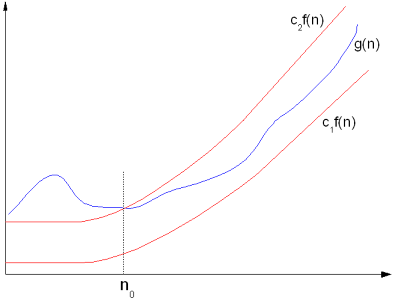
Clasificaremos a las funciones de coste según su crecimiento asintótico (cuando el tamaño de la entrada crece suficientemente)



Notación asintótica Θ (*zeta*)

Decimos **orden de** f (también, *zeta* de f) a la clase de funciones

$$\Theta(f(n)) = \{g(n) \mid \exists c_1, c_2 > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : \ c_1 f(n) \leq g(n) \leq c_2 f(n)\}$$



Ejemplos: $3n^2 - n \in \Theta(n^2)$, $5n + 1000 \in \Theta(n)$

Propiedades de la notación Θ

- Reflexiva: $f(n) \in \Theta(f(n))$
- Simétrica: $f(n) \in \Theta(g(n))$ si y sólo si $g(n) \in \Theta(f(n))$
- Transitiva: si $f(n) \in \Theta(g(n))$ y $g(n) \in \Theta(h(n))$ entonces $f(n) \in \Theta(h(n))$

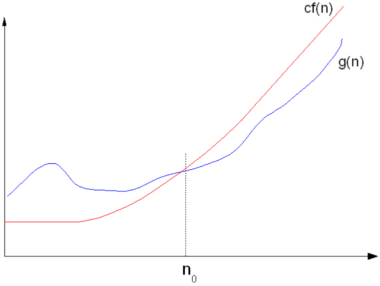
Más propiedades de la notación Θ

- **Regla de la constante**: Para toda constante positiva c:
  - $c + f(n) \in \Theta(f(n))$
  - $cf(n) \in \Theta(f(n))$
- **Regla de la suma**: $(f+g)(n) \in \Theta(\text{máx}(f,g)(n))$ siendo $(f+g)(n) = f(n) + g(n)$ y $\text{máx}(f,g)(n) = \begin{cases} f(n) & \text{si } g(n) \leq f(n) \\ g(n) & \text{si } g(n) > f(n) \end{cases}$
- **Regla del producto**: Si $f_1(n) \in \Theta(g_1(n))$ y $f_2(n) \in \Theta(g_2(n))$ entonces $(f_1 \cdot f_2)(n) \in \Theta((g_1 \cdot g_2)(n))$ siendo $(f \cdot g)(n) = f(n) \times g(n)$

Notación asintótica O

Decimos **O-grande de** f a la clase de funciones

$$O(f(n)) = \{g(n) \mid \exists c > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 :\ g(n) \leq cf(n)\}$$



Ejemplos: $5n^3 + 2n \in O(n^3)$, $6n^2 + n + 8 \in O(n^3)$

Propiedades de la notación O

- Reflexiva
- Transitiva

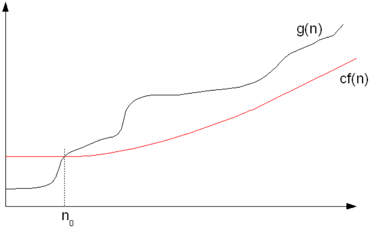
Satisface las propiedades análogas a la

- regla de la constante
- regla de la suma y
- regla del producto

Notación asintótica Ω

Decimos **Omega de** f a la clase de funciones

$$\Omega(f(n)) = \{g(n) \mid \exists c > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 :\ g(n) \geq cf(n)\}$$



Ejemplos: $n^2/2 \in \Omega(n^2)$ y $2n^3 + n \in \Omega(n^2)$, pero $n^2 \notin \Omega(n^3)$.

Propiedades de la notación Ω

- Reflexiva
- Transitiva

Satisface las propiedades análogas a la

- regla de la constante
- regla de la suma y
- regla del producto

Otras notaciones asintóticas

o-pequeña de f

$$o(f(n)) = \{g(n) \mid \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 : \ g(n) < \varepsilon f(n)\}$$

omega-pequeña de f

$$\omega(f(n)) = \{g(n) \mid \forall c > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 : \ g(n) > cf(n)\}$$

Propiedades: Ambas son antirreflexivas y transitivas.

Clasificación de funciones usando límites

1. $$\text{Si} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c > 0 \ \text{ entonces } \ g(n) \in \Theta(f(n))$$

2. $$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \ \text{ si y sólo si } \ f(n) \in o(g(n))$$

3. $$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \ \text{ si y sólo si } \ g(n) \in o(f(n))$$

Regla de L´Hôpital: Si $f(n)$ y $g(n)$ son derivables y sus derivadas son $f'(n)$ y $g'(n)$ respectivamente y además $\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$$

siempre que el límite de la parte derecha de la ecuación exista.

Abuso de notación

Por conveniencia usaremos la notación:
$t(n) = 5n^3 + \Theta(f(n))$ queriendo decir que existe una función $g(n) \in \Theta(f(n))$ tal que $t(n) = 5n^3 + g(n)$.

O también
$t(n) = \Theta(n^3) + o(f(n))$ queriendo decir que existe una función $h(n) \in \Theta(n^3)$ y otra $g(n) \in o(f(n))$ tal que $t(n) = h(n) + g(n))$.

Y eso para cualquier operación entre funciones y cualquier notación asintótica. Por ejemplo: $t(n) = n^{O(1)}$

OJO: Podemos usar $g(n) = \Theta(f(n))$ en vez de $g(n) \in \Theta(f(n))$, pero $\Theta(f(n)) = g(n)$ no tiene sentido.