5.- APROXIMACIÓN DE FUNCIONES POR POLINOMIOS.
POLINOMIO DE TAYLOR
PRELIMINARES

Polinomio de Taylor

Polinomio de Taylor de orden n de una función en un punto

Definimos el Polinomio de Taylor de orden n de una función f(x) en un punto a

$$\text{poltaylor}[f\_, x\_, a\_, n\_] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}[a]\,(x-a)^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-a+x)^k f^{(k)}[a]}{k!}$$

Para la función a=1, el Polinomio de Taylor de orden 5 será

```
poltaylor[f, x, 1, 5]
```

$$f[1] + (-1+x)\,f'[1] + \frac{1}{2}(-1+x)^2 f''[1] + \frac{1}{6}(-1+x)^3 f^{(3)}[1] + \frac{1}{24}(-1+x)^4 f^{(4)}[1] + \frac{1}{120}(-1+x)^5 f^{(5)}[1]$$

Para la función f1, el Polinomio de Taylor de orden 4

```
f1[x_] = x^80 - x^40 + x^20
```

$$x^{20} - x^{40} + x^{80}$$

```
poltaylor[f1, x, 1, 4]
```

$$1 + 60\,(-1+x) + 2570\,(-1+x)^2 + 73\,420\,(-1+x)^3 + 1\,495\,035\,(-1+x)^4$$

Un valor aproximado de f en x=1.005 será

```
poltaylor[f1, 1.005, 1, 4]
```

1.37436

y el valor real

```
f1[1.005]
```

1.37444

Desarrollo de McLaurin

Desarrollos de McLaurin de orden n de una función

Para obtener el Desarrollo de McLaurin para una función f(x), tomamos en el Polinomio de Taylor a=0

```
maclaurin[f_, x_, n_] = poltaylor[f, x, 0, n]
```

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k f^{(k)}[0]}{k!}$$

Para obtener el Desarrollo de McLaurin para una función f de grado 7, tomamos n=7

```
f1[x_] = Sin[x]
```

Sin[x]

```
maclaurin[f1, x, 7]
```

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

Desarrollos de McLaurin de orden n de las funciones elementales

Definimos las funciones y calculamos sus desarrollos

$$\text{poltaylor}[f\_, x\_, a\_, n\_] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}[a]\,(x-a)^k}{k!};$$

```
exp[x_] = Exp[x];
```

```
log[x_] = Log[1 + x];
```

```
sen[x_] = Sin[x];
```

```
cos[x_] = Cos[x];
```

```
raiz[x_] = (1 + x)^r;
```

```
tan[x_] = Tan[x];
```

```
arctan[x_] = ArcTan[x];
```

```
Grid[Transpose[
  {{"ⅇ^x", "Ln(1+x)", "Senx", "Cosx", "(1+x)^r", "tgx", "arctgx"},
   {poltaylor[exp, x, 0, 7], poltaylor[log, x, 0, 7],
    poltaylor[sen, x, 0, 7], poltaylor[cos, x, 0, 6],
    poltaylor[raiz, x, 0, 3], poltaylor[tan, x, 0, 5],
    poltaylor[arctan, x, 0, 7]}}], Frame → All]
```

e^x	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^7}{5040}$
Ln(1+x)	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}$
Senx	$x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}$
Cosx	$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}$
$(1+x)^r$	$1+r\,x+\frac{1}{2}(-1+r)\,r\,x^2+\frac{1}{6}(-2+r)(-1+r)\,r\,x^3$
tgx	$x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}$
arctgx	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}$

Desarrollos de McLaurin a partir de otros desarrollos conocidos

$$\text{poltaylor}[f\_, x\_, a\_, n\_] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}[a]\,(x-a)^k}{k!};$$

Calculamos los desarrollos de MacLaurin de la función f2(x) = sen 2 *x*

```
f1[x_] = Sin[x];
```

```
poltaylor[f1, 2 x, 0, 5] // Expand
```

$$2x-\frac{4x^3}{3}+\frac{4x^5}{15}$$

```
f2[x_] = Sin[2 x];
```

```
poltaylor[f2, x, 0, 5] // Expand
```

$$2\,x-\frac{4\,x^3}{3}+\frac{4\,x^5}{15}$$

Calculamos los desarrollos de MacLaurin de la función f3(x) = $\text{sen}^2 x$

```
poltaylor[f1, x, 0, 5]^2 // Expand
```

$$x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{2\,x^6}{45}-\frac{x^8}{360}+\frac{x^{10}}{14\,400}$$

```
f3[x_] = Sin[x]^2;
```

```
poltaylor[f3, x, 0, 5] // Expand
```

$$x^2-\frac{x^4}{3}$$

Valores aproximados

Cálculo de sucesivas aproximaciones del número e

$$\texttt{poltaylor}[f\_, x\_, a\_, n\_] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}[a]\,(x-a)^k}{k!};$$

```
exp[x_] = Exp[x];
```

$$\texttt{serie}[f\_, x\_, a\_, n\_] = \sum_{k=0}^{n} \texttt{Derivative}[k][f][a] * ((x-a)\,{}^\wedge k)\,/\,k!$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-a+x)^k\, f^{(k)}[a]}{k!}$$

```
TableForm[Table[{poltaylor[exp, x, 0, k],
   N[poltaylor[exp, 1, 0, k], 10], N[f1^(k+1)[0]/(k + 1)!, 10]}, {k, 1, 10}],
  TableHeadings → {Automatic, {"P_{k,0}(x)", "P_{k,0}(1)", "f^(k+1)[0]/(k+1)!"}}]
```

	$P_{k,0}(x)$	$P_{k,0}(1)$	$\frac{f^{(k+1)}[0]}{(k+1)!}$
1	$1+x$	2.000000000	0
2	$1+x+\frac{x^2}{2}$	2.500000000	−0.1666666667
3	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$	2.666666667	0
4	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$	2.708333333	0.008333333333
5	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}$	2.716666667	0
6	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}$	2.718055556	−0.0001984126984
7	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^7}{5040}$	2.718253968	0
8	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^7}{5040}+\frac{x^8}{40320}$	2.718278770	2.755731922×10^{-6}
9	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^7}{5040}+\frac{x^8}{40320}+\frac{x^9}{362880}$	2.718281526	0
10	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^7}{5040}+\frac{x^8}{40320}+\frac{x^9}{362880}+\frac{x^{10}}{3628800}$	2.718281801	$-2.505210839\times10^{-8}$

Orden y parte principal de un infinitésimo

Para estudiar el orden de un infinitésimo cuando x→0, previamente obtenemos su desarrollo de McLaurin

```
poltaylor[f_, x_, a_, n_] = Sum[f^(k)[a] (x - a)^k / k!, {k, 0, n}];
```

```
f1[x_] = Sin[x] - x*Cos[x];
```

```
poltaylor[f1, x, 0, 10]
```

$$\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}+\frac{x^7}{840}-\frac{x^9}{45360}$$

La función f1(x) es un infinitésimo de orden k cuando x→0, si $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^k}=L$, donde L es un número real ≠0

```
lim[f_, k_] := Limit[poltaylor[f, x, 0, 10] / x^k, x → 0]
```

```
TableForm[Table[{k, lim[f1, k]}, {k, 0, 10}],
 TableHeadings → {None, {"k", limite}}]
```

k	limite
0	0
1	0
2	0
3	$\frac{1}{3}$
4	∞
5	∞
6	∞
7	∞
8	∞
9	∞
10	∞

En este caso el único valor de n para el que se cumple que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^k} = L$, donde L es un número real ≠0 es para k=3 y se tiene que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3} = \frac{1}{3}$. Por tanto f(x) es un infinitésimo de orden 3 y su parte principal es $\frac{1}{3}x^3$, que es el primer término no nulo del desarrollo de MacLaurin.

```
ppal[f_, x_, k_] = lim[f, k] * x^k;
```

```
ppal[f1, x, 3]
```

$\frac{x^3}{3}$

Comparación de infinitésimos

Sean f1(x)=Ln $\sqrt{1+\sin x^2}$ y f2(x) = Log $\sqrt{2 - \mathrm{Cos}[x]}$ infinitésimos cuando x→0 . Se pide:

a) Determinar el orden y la parte principal de f(x) y de g(x).

b) ¿Son f(x) y g(x) infinitésimos equivalentes cuando x→0 ?.

⇒ **Definición de las funciones**

```
f1[x_] = Log[√(1 + Sin[x^2])];
```

```
f2[x_] = Log[√(2 - Cos[x])];
```

⇒ **Estudio del orden del infinitésimo f1(x)=Log $\sqrt{1+\text{Sin}[x^2]}$ cuando x→0**

$$\text{poltaylor}[f\_, x\_, a\_, n\_] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}[a]\,(x-a)^k}{k!};$$

$$\text{lim}[f\_, k\_] := \text{Limit}\left[\frac{\text{poltaylor}[f, x, 0, 8]}{x^k}, x \to 0\right]$$

$$\text{ppal}[f\_, x\_] = \text{lim}[f, k] * x^k;$$

Obtenemos el Desarrollo de McLaurin para la función f1

```
poltaylor[f1, x, 0, 8]
```

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{12} - \frac{x^8}{24}$$

```
TableForm[Table[{k, lim[f1, k]}, {k, 0, 8}],
 TableHeadings → {None, {"k", limite}}]
```

k	2
0	0
1	0
2	$\frac{1}{2}$
3	∞
4	∞
5	∞
6	∞
7	∞
8	∞

En cuyo caso nos queda que el orden es k=2 y su parte principal es $\frac{1}{2}x^{2}$

```
ppal[f1, x, 2]
```

$$\frac{x^2}{2}$$

⇒ **Estudio del orden del infinitésimo f2(x)=Log $\sqrt{2-\text{Cos}[x]}$ cuando x→0**

$$\text{poltaylor}[f\_, x\_, a\_, n\_] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}[a]\,(x-a)^k}{k!};$$

$$\text{lim}[f\_, k\_] := \text{Limit}\left[\frac{\text{poltaylor}[f, x, 0, 8]}{x^k}, x \to 0\right]$$

$$\text{ppal}[f\_, x\_, k\_] = \text{lim}[f, k] * x^k;$$

Obtenemos el Desarrollo de McLaurin para la función f2

```
poltaylor[f2, x, 0, 8]
```

$$\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{12} + \frac{23\,x^6}{720} - \frac{557\,x^8}{40\,320}$$

```
TableForm[Table[{k, lim[f2, k]}, {k, 0, 8}],
 TableHeadings → {None, {"k", limite}}]
```

k	2
0	0
1	0
2	$\frac{1}{4}$
3	∞
4	∞
5	∞
6	∞
7	∞
8	∞

En cuyo caso nos queda que el orden es k=2 y su parte principal es $\frac{1}{4}x^{\,2}$

```
ppal[f2, x, 2]
```

$$\frac{x^2}{4}$$

⇒ Comparación de los infinitésimos f1 y f2 cuando x→0

Comparación de los infinitésimos f1 y f2 cuando x→0

Para que f (x) y g(x) sean un infinitésimos equivalentes cuando x→0, han de ser del mismo orden y además debe cumplirse que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$. En el límite sustituimos los infinitésimos por sus partes principales

```
limite = Limit[ppal[f1, x, 2] / ppal[f2, x, 2], x → 0]
```

2

```
If[limite == 1, Print["f1 y f2 son infinitésimos equivalentes"],
 Print["f1 y f2 son infinitésimos del mismo orden pero
    no son equivalentes puesto que el límite es ≠ 1"]]
```

```
f1 y f2 son infinitésimos del mismo
  orden pero no son equivalentes puesto que el límite es ≠ 1
```