5.- APROXIMACIÓN DE FUNCIONES POR POLINOMIOS.
POLINOMIO DE TAYLOR
APLICACIONES PRÁCTICAS

EJERCICIO 1

Calcular un valor aproximado de los números: Pi , ln2, sen1, cos1/2,$\sqrt{2}$

Definimos las funciones y el Polinomio de Taylor

```
f1[x_] = ArcTan[x];
```

```
f2[x_] = Log[1 + x];
```

```
f3[x_] = Sin[x];
```

```
f4[x_] = Cos[x];
```

```
f5[x_] = (1 + x) ^ (1 / 2);
```

$$\text{poltaylor}[f\_,\ x\_,\ a\_,\ n\_] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}[a] * (x-a)^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-a+x)^k f^{(k)}[a]}{k!}$$

El valor que nos da el polinomio *de Taylor* de diferentes grados como valor aproximado dichos números será

```
N[
 TableForm[Table[{4 * poltaylor[f1, 1, 0, n], poltaylor[f2, 1, 0, n],
    poltaylor[f3, 1, 0, n], poltaylor[f4, 1 / 2, 0, n],
    poltaylor[f5, 1, 0, n]}, {n, 1, 45, 4}],
  TableHeadings → {{"P1", "P5", "P9", "P13", "P17",
     "P21", "P25", "P29", "P33", "P37", "P41", "P45"},
    {"π", "Ln2", "Sen1", "Cos1/2", "√2"}}], 12]
```

	π	Ln2	Sen1	Cos1/2	$\sqrt{2}$
P1	4.00000000000	1.00000000000	1.00000000000	1.00000000000	1.50000000000
P5	3.46666666667	0.783333333333	0.841666666667	0.877604166667	1.42578125000
P9	3.33968253968	0.745634920635	0.841471009700	0.877582562159	1.41920471191
P13	3.28373848374	0.730133755134	0.841470984809	0.877582561890	1.41713154316
P17	3.25236593472	0.721695379784	0.841470984808	0.877582561890	1.41617970006
P21	3.23231580941	0.716390450794	0.841470984808	0.877582561890	1.41565220236
P25	3.21840276593	0.712747499543	0.841470984808	0.877582561890	1.41532454556
P29	3.20818565226	0.710091471025	0.841470984808	0.877582561890	1.41510476878
P33	3.20036551541	0.708069232511	0.841470984808	0.877582561890	1.41494896359
P37	3.19418790923	0.706478145625	0.841470984808	0.877582561890	1.41483379344
P41	3.18918478228	0.705193625695	0.841470984808	0.877582561890	1.41474582935
P45	3.18505041535	0.704134865334	0.841470984808	0.877582561890	1.41467685395

El valor de dichos números con 20 dígitos significativos es

```
Grid[Transpose[N[{{"π", "Ln2", "Sen1", "Cos1/2", "√2"},
    {π, Log[2], Sin[1], Cos[1 / 2], √2}}, 20]], Frame → All]
```

π	3.1415926535897932385
Ln2	0.69314718055994530942
Sen1	0.84147098480789650665
Cos1/2	0.87758256189037271612
$\sqrt{2}$	1.4142135623730950488

EJERCICIO 2

Dada la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2x^2+1}}$

a) Hallar su desarrollo de McLaurin de orden 4

b) Utilizando el desarrollo anterior calcular aproximadamente $\frac{1}{\sqrt[4]{1{,}08}}$

```
f1[x_] = 1/(2 x^2 + 1)^(1/4)
```

$$\frac{1}{\left(1+2x^2\right)^{1/4}}$$

Apartado a

$$\text{poltaylor[f\_, x\_, a\_, n\_]} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}[a] * (x-a)^k}{k!};$$

```
maclaurin[x_] = poltaylor[f1, x, 0, 4]
```

$$1-\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{8}$$

Apartado b

Calculamos el valor de x para poder aplicar el desarrollo de McLaurin de la función $f(x)$ a la expresión $\frac{1}{\sqrt[4]{1{,}08}}$

$$\text{s = Solve}\left[\text{f1[x]} == \frac{1}{\sqrt[4]{1.08}}\right]$$

```
{{x → -0.2}, {x → 0.2}}
```

```
valor = x /. s[[2]]
```

```
0.2
```

Hacemos que $f(x) \simeq P_{0,4}(x)$ en $x = 0.2$

```
maclaurin[valor]
```

0.981

EJERCICIO 3

Calcular el desarrollo de McLaurin de f(x) =ArcTanx para resolver la ecuación ArcTanx = x^2

$$\text{poltaylor[f\_, x\_, a\_, n\_]} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}[a] * (x-a)^k}{k!};$$

```
f2[x_] = ArcTan[x]
```

ArcTan[x]

```
maclaurin[x_] = poltaylor[f2, x, 0, 3]
```

$x - \frac{x^3}{3}$

Resolvemos la ecuación ArcTanx = x^2

```
maclaurin[x] == x
```

$x - \frac{x^3}{3} == x$

```
s = Solve[maclaurin[x] == x^2, x]
```

$\left\{\{x \to 0\}, \left\{x \to \frac{1}{2}\left(-3 - \sqrt{21}\right)\right\}, \left\{x \to \frac{1}{2}\left(-3 + \sqrt{21}\right)\right\}\right\}$

```
N[%]
```

{{x → 0.}, {x → -3.79129}, {x → 0.791288}}

Como se puede observar en la gráfica, los verdaderos puntos de corte son x1 y x2. El otro punto sería el punto de corte del desarrollo de McLaurin con y=x^2

```
x1 = s[[1, 1, 2]]
```

0

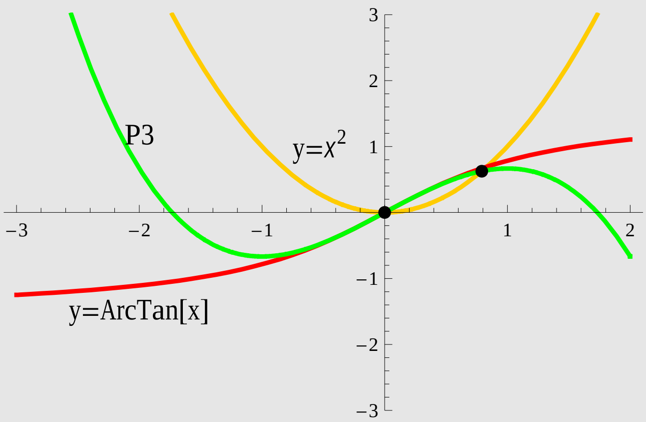
```
x2 = s[[3, 1, 2]] // N
```

```
0.791288
```

```
y2 = maclaurin[x2] // N
```

```
0.626136
```

```
g1 = Plot[{x^2, ArcTan[x], x - x^3/3}, {x, -3, 2},
   PlotStyle → {{RGBColor[1, 0.8, 0], Thickness[0.007]},
     {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.007]},
     {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.007]}}, PlotRange → {-3, 3}];
p1 = Point[{0, 0}];
punto1 = Graphics[{PointSize[0.02], p1}];
p2 = Point[{x2, y2}];
punto2 = Graphics[{PointSize[0.02], p2}];
etiquetas = {Text["y=ArcTan[x]", {-2, -1.5}],
   Text["y=x^2 ", {-0.5, 1}], Text["P3", {-2, 1.2}]};
Show[g1, punto1, punto2, Epilog → Graphics[etiquetas][[1]]]
```



EJERCICIO 4

Sea f(x)=a senx +3 $\sqrt{1+x^2}$ +b e^x+ c cosx un infinitésimo cuando x→0 . Se pide

a) Determinar el Desarrollo de McLaurin de orden 3 de f(x).

b) Determinar a, b y c para que f (x) sea un infinitésimo de orden máximo, cuandox→0 .

c) Utilizar el desarrollo de McLaurin obtenido para calcular un valor aproximado de f en el punto x=0.1.

Apartado a

Obtenemos el desarrollo de Taylor de orden n de una función f(x) en un punto a

$$\texttt{poltaylor[f\_, x\_, a\_, n\_]} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}[a] * (x-a)^k}{k!};$$

Para la función f(x) obtenemos el siguiente desarrollo de orden 3 en el punto x=0

$$\texttt{f[x\_]} = a * \mathrm{Sin}[x] + b * e^x + c * \mathrm{Cos}[x] + 3\sqrt{1+x^2};$$

```
maclaurin[x_] = poltaylor[f, x, 0, 3]
```

$$3+b+c+(a+b)\,x+\frac{1}{2}(3+b-c)\,x^2+\frac{1}{6}(-a+b)\,x^3$$

Apartado b

Cuando **f (x) es un infinitésimo de orden "r" en x→0** , se cumple

$$\boxed{\begin{array}{l} a.-\ \mathrm{Lim}_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0;\quad \mathrm{si}\ n<r \\ b.-\ \mathrm{Lim}_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = L;\quad \mathrm{si}\ n=r \\ c.-\ \mathrm{Lim}_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = \infty;\quad \mathrm{si}\ n>r \end{array}}$$

Será un infinitésimo de orden"r" > n si se cumple que $\mathrm{Lim}_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0 \quad \mathrm{si}\ n = 0 < r.$

Definimos el polinomio de grado 3

```
p[x_] = a[0] + a[1] x + a[2] x^2 + a[3] x^3
```

$a[0] + x\, a[1] + x^2\, a[2] + x^3\, a[3]$

Veamos si es de orden mayor que cero

```
n = 0;
lim[n] = Limit[p[x]/x^n, x → 0]
```

a[0]

Será de orden r=0 si a[0]≠0, y de orden r>0 si a[0]=0.

```
p1[x_] = p[x] /. a[0] → 0;
n = 1;
lim[n] = Limit[p1[x]/x^n, x → 0]
```

a[1]

Será de orden r=1 si a[1]≠0, y de orden r>1 si a[1]=0.

```
n = 2;
p2[x_] = p1[x] /. a[1] → 0;
lim[n] = Limit[p2[x]/x^n, x → 0]
```

a[2]

Será de orden r=2 si a[2]≠0, y de orden r>2 si a[2]=0.

```
n = 3;
p3[x_] = p2[x] /. a[2] → 0;
lim[n] = Limit[p3[x]/x^n, x → 0]
```

a[3]

Será de orden r=3 si a[3]≠0, y de orden r>3 si a[3]=0.

$$a[0] = 3 + b + c;\ a[1] = a + b;\ a[2] = \frac{1}{2}(3 + b - c);\ a[3] = \frac{1}{6}(-a + b);$$

Para que f (x) sea un infinitésimo de orden máximo han de verificarse las condiciones:

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{1}{2}(3+b-c)=0 \\ a+b=0 \\ 3+b+c=0 \end{array}}$$

es decir, debemos resolver este sistema de ecuaciones

```
s = Solve[{3 + b + c == 0, 3 + b - c == 0, b + a == 0}]
```

```
{{a → 3, b → -3, c → 0}}
```

```
lim[3] /. s[[1]]
```

```
-1
```

En cuyo caso nos queda que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}$ =-1 para n=3, que por ser un número real ≠0, f es un infinitésimo de orden 3.

Apartado c

```
maclaurin[x] /. s[[1]]
```

$-x^3$

```
maclaurin[0.1] /. s[[1]]
```

```
-0.001
```

EJERCICIO 5

Determinar los valores de a, b y c para que f1(x)=x+senx (b + c cosx) y f2(x)=a $\left(-1+\sqrt{1+x^2}\right)$ (x - Sin[x]) sean infinitésimos del mismo orden, cuando x→0.

```
Clear["Global`*"]
```

$$\texttt{poltaylor[f\_, x\_, a\_, n\_]} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}[a]\,(x-a)^k}{k!};$$

Obtenemos el desarrollo de McLaurin de orden 6 de la función f1(x)

```
f1[x_] = x - Sin[x] * (b + c * Cos[x]);
```

```
pf1 = poltaylor[f1, x, 0, 6]
```

$$(1 - b - c)\, x + \frac{1}{6}(b + 4 c)\, x^3 + \frac{1}{120}(-b - 16 c)\, x^5$$

Obtenemos el desarrollo de McLaurin de orden 6 de la función f2(x)

```
f2[x_] = a * (x - Sin[x]) * (Sqrt[1 + x^2] - 1);
```

$$f2[x\_] = a * (x - Sin[x]) * \left(\sqrt{1 + x^2} - 1\right);$$

```
pf2 = poltaylor[f2, x, 0, 6]
```

$$\frac{a\, x^5}{12}$$

Igualamos los polinomios de Taylor obligando a que los coeficientes del poinomio sean iguales

```
s = Solve[{Coefficient[pf1, x] == 0,
   Coefficient[pf1, x^3] == 0, Coefficient[pf1, x^5] == a / 12}]
```

$$\left\{\left\{a \to \frac{2}{5},\ b \to \frac{4}{3},\ c \to -\frac{1}{3}\right\}\right\}$$

```
ppalf1 = poltaylor[f1, x, 0, 6] /. s[[1]]
```

$$\frac{x^5}{30}$$

```
ppalf2 = poltaylor[f2, x, 0, 6] /. s[[1]]
```

$$\frac{x^5}{30}$$

Comprobamos que son equivalentes ya que $\lim_{x \to 0} \frac{f1(x)}{f2(x)} = 1$

```
limite = Limit[ppalf1 / ppalf2, x → 0]
```

1

EJERCICIO 6

Utilizar el desarrollo de Taylor para calcular el orden y la parte principal de las

funciones $f(x) = \left(-1+e^{x^2}\right)\mathrm{Log}[1+3\,x]$ y

g(x)=a x^n(Tan[x] - Sin[x]) cuando $x\text{->}0$. Calcular también $\lim_{x\text{->}0} \frac{\left(-1+e^{x^2}\right)\mathrm{Log}[1+3\,x]}{a\,x^n(Tan[x]-Sin[x])}$

$$\text{poltaylor}[f\_, x\_, a\_, n\_] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}[a]\,(x-a)^k}{k!};$$

Obtenemos el desarrollo de McLaurin de orden 5 de la función f(x) y su parte principal

```
f1[x_] = (E^(x^2) - 1) * Log[1 + 3 * x];
```

```
poltaylor[f1, x, 0, 5]
```

$$3\,x^3 - \frac{9\,x^4}{2} + \frac{21\,x^5}{2}$$

```
ppalf1 = poltaylor[f1, x, 0, 3]
```

$3\,x^3$

Obtenemos la parte principal de la función g(x) y obtenemos el valor de a para que sean del mismo orden

```
g[x_] = a * (x^n) * (Tan[x] - Sin[x]);
```

```
ppalg = a * (x^n) poltaylor[f2, x, 0, 3]
```

$$\frac{1}{2}\,a\,x^{3+n}$$

```
Solve[ppalf1 == ppalg, a] /. n -> 0
```

$\{\{a \to 6\}\}$

Calculamos el límite pedido utilizando sus partes principales, viendo que además son equivalentes

```
limite = Limit[ppalf1 / ppalg, x → 0] /. {n → 0, a → 6}
```

1

EJERCICIO 7

La velocidad con la que una determinada sustancia crece es proporcional a la cantidad de sustancia n(t)
existente en cada instante t.

a) Sabiendo que n'(t)=$\frac{1}{4}$n(t), demostrar que: n''(t)=$\frac{1}{4^2}$n(t); n'''(t)=$\frac{1}{4^3}$n(t); ... , $n^{(6)}$(t)=$\frac{1}{4^5}$n(t);

b) En el instante t=0 la cantidad de sustancia es n(0)=200. Utilizando el desarrollo de McLaurin de orden 6 de la función dada calcular un valor aproximado de la cantidad de sustancia existente cuando han transcurrido 10 unidades de tiempo.

c) Calcular de forma directa la dunción n(t).

Apartado a

Definimos la ecuación n'(t)=$\frac{1}{4}$n(t)

```
ec[t_] = D[n[t], t] == 1/4 * n[t]
```

$$n'[t] == \frac{n[t]}{4}$$

Derivando sucesivamente esta ecuación ec[t], se demuestra que n''(t)=$\frac{1}{4}$n'(t), n'''(t)=$\frac{1}{4}$n''(t), ... , $n^{(6)}$(t)=$\frac{1}{4}n^{(5)}$(t)

```
MatrixForm[Table[D[ec[t], {t, k}], {k, 0, 6}]]
```

$$\begin{pmatrix} n'[t] == \frac{n[t]}{4} \\ n''[t] == \frac{n'[t]}{4} \\ n^{(3)}[t] == \frac{n''[t]}{4} \\ n^{(4)}[t] == \frac{1}{4} n^{(3)}[t] \\ n^{(5)}[t] == \frac{1}{4} n^{(4)}[t] \\ n^{(6)}[t] == \frac{1}{4} n^{(5)}[t] \\ n^{(7)}[t] == \frac{1}{4} n^{(6)}[t] \end{pmatrix}$$

Hemos demostrado que para cada valor de k se verifica $n^{(k)}$(t)=$\frac{1}{4}n^{(k-1)}$(t), lo que hacemos constar a continuación

```
dn[t_, 0] := n[t]
```

```
dn[t_, 1] := 1/4 * n[t]
```

```
dn[t_, k_] := 1/4 * dn[t, k - 1]
```

Aplicando la identidad $n^{(k)}$(t)=$\frac{1}{4}n^{(k-1)}$(t), sucesivamente , se demuestra que n''(t)=$\frac{1}{4^2}$n(t), n'''(t)=$\frac{1}{4^3}$n(t), ... , $n^{(6)}$(t)=$\frac{1}{4^6}$n(t)

```
Table[dn[t, k], {k, 0, 6}]
```

$$\left\{n[t], \frac{n[t]}{4}, \frac{n[t]}{16}, \frac{n[t]}{64}, \frac{n[t]}{256}, \frac{n[t]}{1024}, \frac{n[t]}{4096}\right\}$$

Apartado b

El Desarrollo de McLaurin de orden n de una función f(x) viene dado por $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}[0]\, x^k}{k!}$. Puesto que dn[0,k] denotan las sucesivas derivadas de la función n[t] en t=0, el Desarrollo de McLaurin de orden 4 para la función n[t] será:

```
Table[dn[0, k], {k, 0, 6}]
```

$$\left\{n[0], \frac{n[0]}{4}, \frac{n[0]}{16}, \frac{n[0]}{64}, \frac{n[0]}{256}, \frac{n[0]}{1024}, \frac{n[0]}{4096}\right\}$$

$$serien[t\_] = \sum_{k=0}^{6} \frac{dn[0, k] * t^k}{k!}$$

$$n[0] + \frac{1}{4}\, t\, n[0] + \frac{1}{32}\, t^2\, n[0] + \frac{1}{384}\, t^3\, n[0] + \frac{t^4\, n[0]}{6144} + \frac{t^5\, n[0]}{122\,880} + \frac{t^6\, n[0]}{2\,949\,120}$$

```
serien[10.]
```

12.0097 n[0]

```
n[0] = 200.;
```

```
serien[10]
```

2401.93

Apartado c

Hay que hallar una función n(t) que satisfaga la identidad: n'(t)=$\frac{1}{4}$n(t); es decir una función n(t) que verifique la identidad

$$ec = \frac{n'[t]}{n[t]} == \frac{1}{4}$$

$$\frac{n'[t]}{n[t]} == \frac{1}{4}$$

Integramos ambos miembros de la ecuación respecto de t. Si dos funciones tienen la misma derivada entonces se diferencian en una constante; luego se verifica que $\int g[t]\, dt = \int h[t]\, dt + c$

```
g[t_] = 1/4;
```

```
h[t_] = n'[t]/n[t];
```

```
Integrate[g[t], t] == Integrate[h[t], t] + c
```

$\frac{t}{4} == c + \mathrm{Log}[n[t]]$

Por tanto las soluciones de la ecuación dada serán

```
sol = Solve[Integrate[g[t] - h[t], t] == c, n[t]]
```

$\{\{n[t] \to e^{-c+\frac{t}{4}}\}\}$

Definimos la familia de soluciones, sustituyendo e^{-c} por k, y comprobemos que efectivamente verifica la ecuación dada

```
n[t_] = sol[[1, 1, 2]] / e^-c * k // Simplify
```

$e^{t/4}\, k$

```
ec
```

True

Determinamos el valor de k sabiendo que se verifica la condición n(0)=200

```
cons = Solve[n[0] == 200, k]
```

$\{\{k \to 200\}\}$

La función n(t) buscada será

```
n[t] /. k -> cons[[1, 1, 2]]
```

$200\, e^{t/4}$