4.- DERIVABILIDAD DE UNA FUNCION REAL DE VARIABLE REAL PRELIMINARES TEÓRICOS

Función Derivada. Derivadas Sucesivas

Para hallar la derivada de una función podemos o bien utilizar su definición matemática o bien utlizar diferentes instrucciones implementadas en el programa *Mathematica*

Utilizando la definición

Si utilizamos la definición matemática de derivada de una función $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, basta con calcular un límite

```
f[x_] = Sin[x];
```

$$\text{Limit}\left[\frac{f[x+h]-f[x]}{h},\ h \to 0\right]$$

```
Cos[x]
```

Operador '

⇒ f'[x], f''[x], f'''[x]....

Devuelve la derivada primera, segunda, tercera,.... de la función f(x) indicada

$$f[x\_] = x^5 - 2\,x^3 + 4\,x - 7;$$

```
f'[x]
```

$$4 - 6\,x^2 + 5\,x^4$$

```
f''[x]
```

$-12\,x + 20\,x^3$

```
f'''[x]
```

$-12 + 60\,x^2$

Función D

⇒ D[f[x],x]

Devuelve la primera derivada de la función f(x)

```
D[f[x], x]
```

$4 - 6\,x^2 + 5\,x^4$

⇒ D[f[x],{x,n}]

Devuelve la derivada de orden n de la función f(x)

```
D[f[x], {x, 3}]
```

$-12 + 60\,x^2$

Derivadas Laterales de una función de una variable

Derivada de un función por la izquierda

Utilizando la definición matemática de derivada de una función $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, basta con calcular un limite

```
f[x_] = Sin[x];
```

```
Limit[(f[x + h] - f[x])/h, h → 0, Direction → 1]
```

```
Cos[x]
```

Derivada de un función por la derecha

Utilizando la definición matemática de derivada de una función $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, basta con calcular un limite

```
f[x_] = Sin[x];
```

```
Limit[(f[x + h] - f[x])/h, h → 0, Direction → -1]
```

```
Cos[x]
```

Derivada de una función de una variable en un punto

Para hallar la derivada de una función en un punto podemos o bien utilizar su definición matemática o bien utlizar diferentes instrucciones implementadas en el programa *Mathematica*

Utilizando la definición

Si utilizamos la definición matemática de derivada de una función en un punto x=a, $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, basta con calcular un límite

```
f[x_] = x^5 - 2 x^3 + 4 x - 7;; a = 1;
```

```
Limit[(f[a + h] - f[a])/h, h → 0]
```

```
3
```

Operador '

⇒ f'[punto], f''[punto], f'''[punto]....

Devuelve la derivada primera, segunda, tercera,.... de la función f evaluada en el punto indicado

```
f'[1]
3
```

```
f''[1]
8
```

```
f'''[1]
48
```

Función D

⇒ D[f[x], x] /. x → punto   o   D[f[x],{x,n}] /. x->punto

Devuelve el valor de la primera derivada o de la derivada enésima de la función f(x) evaluada en el punto indicado

```
D[f[x], x] /. x → 1
3
```

```
D[f[x], {x, 3}] /. x → 1
48
```

Diferencial de una función de una variable

Función Dt

⇒ Dt[f[x]]

Calcula la diferencial de la función f(x)

```
f[x_] = x^5 - 2 x^3 + 4 x - 7;
Dt[f[x]]
```

$4\,\mathrm{Dt}[x] - 6\,x^2\,\mathrm{Dt}[x] + 5\,x^4\,\mathrm{Dt}[x]$

Recta Normal y Recta Tangente a una curva en un punto

La ecuación de la recta tangente a una curva $y=f(x)$ en el punto $P=(x_0,y_0)$ viene dada por $y-y_0= f'(x_0)\,(x-x_0)$

```
f[x_] = x^3 - 2 x^2 + 1;
punto = 1;
tangente[x_] = f[punto] + f'[punto] (x - punto)
```

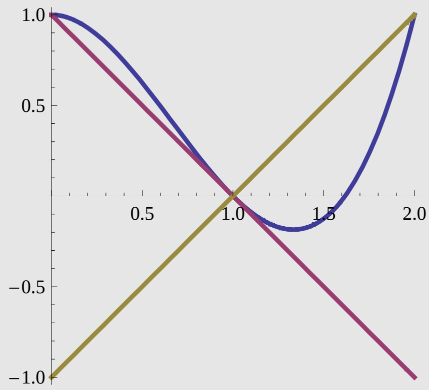
La ecuación de la recta normal a una curva $y=f(x)$ en el punto $P=(x_0,y_0)$ viene dada por $y-y_0= -\frac{1}{f'(x_0)}\,(x-x_0)$

```
normal[x_] = f[punto] - 1/f'[punto] (x - punto)
```

$-1 + x$

Las rectas tangente y normal son perpendiculares en el punto $P=(x_0,y_0)$

```
Plot[{f[x], tangente[x], normal[x]}, {x, 0, 2},
 PlotStyle → Thickness[0.012], AspectRatio → Automatic]
```



Cálculo de Raíces Reales de una ecuación

Localización de la raíz de una función utilizando el Método del Punto Fijo

Calcular de forma aproximada la raiz $e^{-x} - x = 0$ que se encuentra en el intervalo (0,1) , con un err inferior a 10^{-1}

⇒ 1. Datos iniciales

```
f[x_] = E^-x - x;
```

```
g[x_] = E^-x;
```

```
er = 10^(-1);
```

⇒ 2. Localización de la raiz

Procedimiento para la localización de la raiz

```
For[k = -10, k < 10, k++, {c, d} = {k, k + 1}; If[f[c] * f[d] < 0,
  Print["La raiz buscada está en el intervalo {c,d}=", {c, d}];
  k = 10, If[f[c] * f[d] == 0,
   If[f[c] == 0, Print["La raiz buscada es c=", c],
    Print["La raiz buscada es d=", d]]]]]
```

```
La raiz buscada está en el intervalo {c,d}={0, 1}
```

La raiz buscada es:

```
FindRoot[f[x] == 0, {x, c}]
```

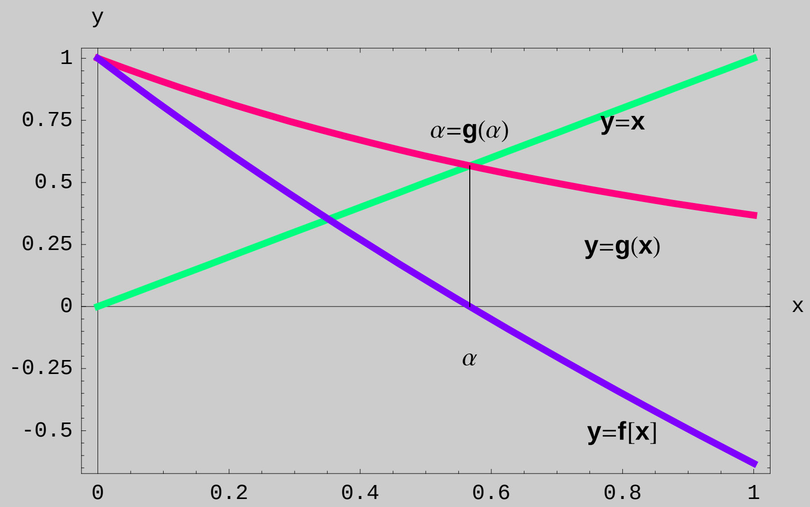
```
{x → 0.567143}
```

```
raiz = x /. %
```

```
0.567143
```

Gráficamente, la raiz buscada será:

```
etiquetas =
  {{Text[FontForm["α", {"Arial-Bold", 12}], {raiz, -0.2`}],
    Text[FontForm["α=g(α)", {"Arial-Bold", 12}],
     {raiz, g[raiz] + 0.15`}],
    Text[FontForm["y=x", {"Arial-Bold", 12}], {0.8`, 0.75`}],
    Text[FontForm["y=f[x]", {"Helvetica-Bold", 12}],
     {0.8`, -0.5`}], Text[
     FontForm["y=g(x)", {"Helvetica-Bold", 12}], {0.8`, 0.25`}]}};
raya = Graphics[{Line[{{raiz, 0}, {raiz, raiz}}]}]
graf = Plot[{x, g[x], f[x]}, {x, c, d}, AxesLabel → {"x", "y"},
   PlotStyle → {{Thickness[0.01`], RGBColor[0, 1, 0.5`]},
     {Thickness[0.01`], RGBColor[1, 0, 0.5`]},
     {Thickness[0.01`], RGBColor[0.5`, 0, 1]}},
   Axes → True, DisplayFunction → Identity];
Show[{graf, raya}, Epilog → etiquetas〚1〛, Frame → True,
 DisplayFunction → $DisplayFunction]
```



⇒ 3. Primera aproximación y error

Empezamos con el punto medio y aplicamos el Test de convergencia

```
x[0] = (c + d) / 2.;
```

```
dg[x_] = D[g[x], x];
```

```
Abs[dg[x[0]]]
```

```
0.606531
```

```
n = 1;
```

```
If[Abs[dg[x[n - 1]]] < 1, Print["Convergente en x[n-1]= ", x[n - 1]],
 Print["Purde ser Divergente"]]
```

```
Convergente en x[n-1]= 0.5
```

```
x[n] = g[x[n - 1]];
```

```
e[n] = Abs[(x[n] - x[n - 1]) / x[n]];
```

Test de parada

```
If[e[n] < er, Print["Ultima Aproximación en", n,
   "iteraciones; x[n]=", x[n]], Print["Nueva aproximación:"];
  Print[ "{n,x[n],e[n]}=", {n, x[n], e[n]}];
  Print["Número de iteraciones = ", n];
  Print["Mejorar la solución"]];

n =
  n + 1;
```

⇒ 4. Mejora de la solución

2ª Iteración

```
If[Abs[dg[x[n - 1]]] < 1, Print["Convergente en x[n-1]= ", x[n - 1]],
  Print["Purde ser Divergente"]];
x[n] = g[x[n - 1]];
e[n] = Abs[(x[n] - x[n - 1]) / x[n]];
If[e[n] < er, Print["Parar"]; Print[
  "Ultima Aproximación en ", n, " iteraciones; x[n]=", x[n]],
 Print["Nueva aproximación {n,x[n],e[n]}=", {n, x[n], e[n]}];
 Print["Mejorar la solución; Número de iteraciones =", n]]

n = n + 1;
```

```
Convergente en x[n-1]= 0.606531
```

```
Nueva aproximación {n,x[n],e[n]}={2, 0.545239, 0.112412}
```

```
Mejorar la solución; Número de iteraciones =2
```

3ª Iteración

```
If[Abs[dg[x[n - 1]]] < 1, Print["Convergente en x[n-1]= ", x[n - 1]],
  Print["Purde ser Divergente"]];
x[n] = g[x[n - 1]];
e[n] = Abs[(x[n] - x[n - 1]) / x[n]];
If[e[n] < er, Print["Parar"]; Print[
  "Ultima Aproximación en ", n, " iteraciones; x[n]=", x[n]],
 Print["Nueva aproximación {n,x[n],e[n]}=", {n, x[n], e[n]}];
 Print["Mejorar la solución; Número de iteraciones =", n]]

n = n + 1;
```

```
Convergente en x[n-1]= 0.545239
```

```
Parar
```

```
Ultima Aproximación en 3 iteraciones; x[n]=0.579703
```