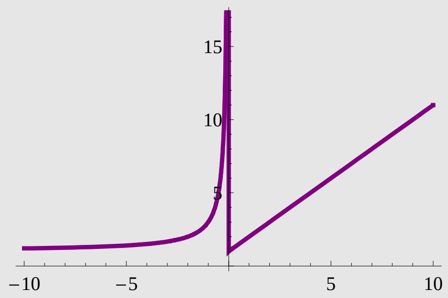
3.- CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL APLICACIONES PRÁCTICAS

EJERCICIO 1

Estudiar la continuidad de la función f(x)= $\begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x-2}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

```
f[x_] = If[x ≥ 0, x + 1, (x - 2)/x];
```

```
Plot[f[x], {x, -10, 10}, PlotStyle -> {Purple, Thickness[0.01]}]
```



Hacemos el estudio de la continuidad en el único punto posible de discontinuidad que es x=0

```
punto = 0; f[punto];
limizq = Limit[f[x], x → punto, Direction -> 1];
limder = Limit[f[x], x → punto, Direction → -1];
```

```
If[limizq == limder == f[punto],
 Print["los límites laterales son iguales y coinciden
    con la imagen de la función en el punto ->  la
    función f(x) es continua en el punto x = ", punto],
 Print["o los límites laterales son distintos o no coinciden
    con la imagen de la función en el punto ->  la
    función f(x) no es continua en el punto x = ", punto]]
```

```
o los límites laterales son distintos o no coinciden con la imagen de la
   función en el punto ->  la función f(x) no es continua en el punto x = 0
```

EJERCICIO 2

Estudiar, según el valor del parámetro real *a*, la continuidad de la función

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3-ax^2 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

```
f[x_] = If[x ≤ 1, x + 1, 3 - a * x^2];
```

Calculamos lo límites laterales en el punto x = 1 (posible punto de discontinuidad) y los igualamos para obtener el valor de *a*

```
punto = 1;
limiz = Limit[f[x], x → punto, Direction → 1];
limder = Limit[f[x], x → punto, Direction → -1];
s = Solve[limiz == limder, a]
```

```
{{a → 1}}
```

Redefinimos la función con el valor de *a* obtenido y calculamos de nuevo el límite de la función en x = 1

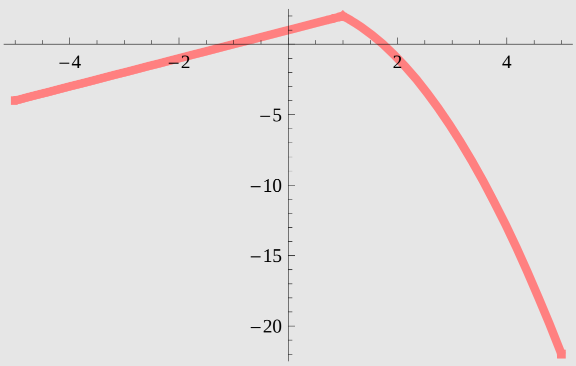
```
f[x_] = f[x] /. s[[1]];
limder = Limit[f[x], x → punto];
```

Comprobamos si la función es o no continua en dicho punto y la dibujamos

```
If[f[punto] == limder, Print["la función es continua en x = 1"],
 Print["la función no es continua en x = 1"]]
```

```
la función es continua en x = 1
```

```
Plot[f[x], {x, -5, 5}, PlotStyle → {Pink, Thickness[0.015]}]
```



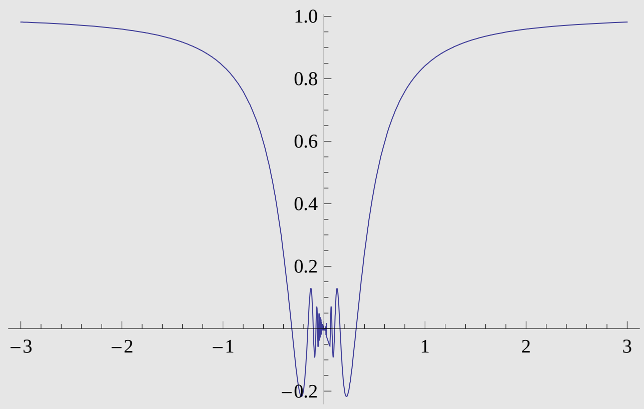
Por tanto, la función f(x) es continua si a=1 para cualquier valor de x

EJERCICIO 3

Estudiar la continuidad de la función g(x)= $\begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

```
g[x_] = If[x == 0, 0, x * Sin[1 / x]];
```

```
Plot[g[x], {x, -3, 3}]
```



Estudiamos la continuidad en el único punto posible de discontinuidad que es x = 0, ya que en ese punto el denominador de hace nulo

```
punto = 0; g[punto];
limiteizquierda = Limit[g[x], x → punto, Direction → 1];
limitederecha = Limit[g[x], x → punto, Direction → -1];
```

```
If[limiteizquierda == limitederecha, If[limiteizquierda == g[punto],
  Print["la función es continua en x = ", punto],
  Print["la funcion tiene límite en x = ",
   punto, " pero no es continua en ese punto"]],
 Print["la funcion no tiene límite en el punto x = ",
  punto, " y por tanto no es continua en él"]]
```

```
la función es continua en x = 0
```

EJERCICIO 4

Estudiar la continuidad de la función g(x)=$\frac{1-\cos x}{x}$; ¿Se podría redefinir para que fuese continua?

```
g[x_] = (1 - Cos[x])/x;
```

Estudiamos la continuidad en el único punto posible de discontinuidad que es x = 0, ya que en ese punto el denominador de hace nulo

```
g[0]
```

Power::infy : Infinite expression $\frac{1}{0}$ encountered. ≫

∞::indet : Indeterminate expression 0 ComplexInfinity encountered. ≫

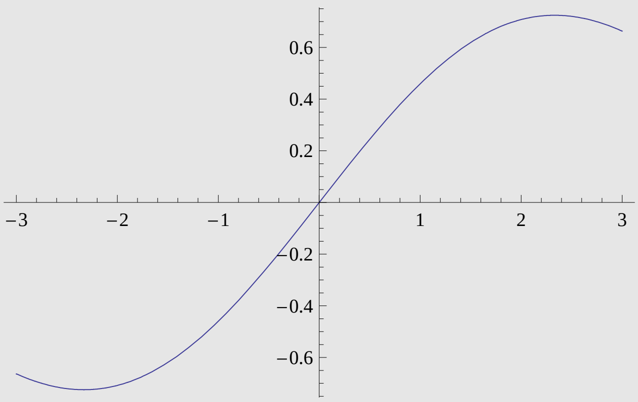
```
Indeterminate
```

Puesto que no está definida en ese punto, no es continua. La definimos en el punto x=0 como g(0) = 1

```
g[x_] = If[x == 0, 1, (1 - Cos[x])/x];
```

Dibujamos la función redefinida

```
Plot[g[x], {x, -3, 3}]
```



Realizamos el estudio de la continuidad para la función redefinida

```
punto = 0; g[punto];
limiteizquierda = Limit[g[x], x → punto, Direction → 1];
limitederecha = Limit[g[x], x → punto, Direction → -1];
```

```
If[limiteizquierda == limitederecha, If[limiteizquierda == g[punto],
  Print["la función es continua en x = ", punto],
  Print["la funcion tiene límite en x = ",
   punto, " pero no es continua en ese punto"]],
 Print["la funcion no tiene límite en el punto x = ",
  punto, " y por tanto no es continua en él"]]
```

```
la funcion tiene límite en x = 0 pero no es continua en ese punto
```

Volvemos a redefinir la función, esta vez haciendo que la imagen de g(x) en el punto x=0 coincida con el valor del límite de la función en ese punto. De esta manera la función será continua en todo su dominio

```
lim = limitederecha;
punto = 0; g[punto] = lim;
```

```
If[limiteizquierda == limitederecha, If[limiteizquierda == g[punto],
  Print["la función es continua en x = ", punto],
  Print["la funcion tiene límite en x = ",
   punto, " pero no es continua en ese punto"]],
 Print["la funcion no tiene límite en el punto x = ",
  punto, " y por tanto no es continua en él"]]
```

```
la función es continua en x = 0
```

EJERCICIO 5

Localizar todas las raíces de la ecuación e^{x}- cosx = 0 en el intervalo [-1,20]. Utilizando el método de bisección, calcular la raíz que se encuentra en el intervalo [1,2] con un error inferior a 10^{-6}

Localización de las raices en el intervalo [-1,20]

Aplicamos el procedimiento para la localización de raíces en un intervalo

```
f[x_] = E^-x - Cos[x];
```

```
For[k = -1, k < 20, k++, {c, d} = {k, k + 1}; If[f[c] * f[d] < 0,
  Print["La raiz buscada está en el intervalo ", {c, d}], If[
   f[c] * f[d] == 0, If[f[c] == 0, Print["La raiz buscada es c=", c],
    Print["La raiz buscada es d=", d]]]]]
```

```
La raiz buscada es d=0
```

```
La raiz buscada es c=0
```

```
La raiz buscada está en el intervalo {1, 2}
```

```
La raiz buscada está en el intervalo {4, 5}
```

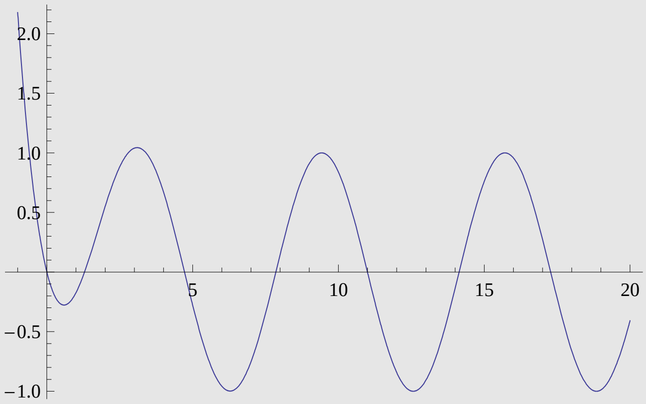
```
La raiz buscada está en el intervalo {7, 8}
```

```
La raiz buscada está en el intervalo {10, 11}
```

```
La raiz buscada está en el intervalo {14, 15}
```

```
La raiz buscada está en el intervalo {17, 18}
```

```
Plot[f[x], {x, -1, k}]
```



Cálculo de la raíz con un error inferior a 10^{-6}

Utilizamos el procedimiento para el cálculo aproximado de raíces

```
it[p_] = IntegerPart[p * Log[10.] / Log[2.]] + 1;
```

```
p = 6;
er = 10^-p;
i = it[p] + 1;
```

```
For[k = -10, k < 10, k++, {c, d} = {k, k + 1}; If[f[c] * f[d] < 0,
  Print["La raiz buscada está en el intervalo {c,d}=", {c, d}];
  k = 10, If[f[c] * f[d] == 0,
   If[f[c] == 0, Print["La raiz buscada es c=", c],
    Print["La raiz buscada es d=", d]]]]]
```

```
La raiz buscada es d=0
```

```
La raiz buscada es c=0
```

```
La raiz buscada está en el intervalo {c,d}={1, 2}
```

```
FindRoot[f[x] == 0, {x, c}]
```

```
{x → 1.2927}
```

```
{a[0],b[0]}={c,d};
```

```
For[n = 1, n < i, n++, x[n] = (a[n - 1] + b[n - 1]) / 2.;
 e[n] = (b[n - 1] - a[n - 1]) / 2.;
 If[f[a[n - 1]] * f[x[n]] < 0, Print["El nuevo intervalo es:"];
  Print[" {a[n],b[n]}=", {a[n], b[n]} = {a[n - 1], x[n]}],
  Print["El nuevo intervalo es:"];
  Print[ " {a[n],b[n]}=", {a[n], b[n]} = {x[n], b[n - 1]}]];
 If[f[x[n]] == 0, Print["La raiz buscada es: {x[n],e[n]}=",
   {x[n], e[n]}]; n = i,
  If[e[n] < er, Print["La raiz aproximada es:"];
   Print[" {x[n],e[n]}=", {x[n], e[n]}];
   Print[" en ", n, " iteraciones"]; n = i,
   Print["La nueva aproximación es:"];
   Print[" {x[n],e[n]}=", {x[n], e[n]}]; Print[
    " en la iteración ", n]; Print["**********************"]]]]
```

```
El nuevo intervalo es:
```

```
 {a[n],b[n]}={1, 1.5}
```

```
La nueva aproximación es:
```

```
 {x[n],e[n]}={1.5, 0.5}
```

```
 en la iteración 1
```

```
**********************
El nuevo intervalo es:
 {a[n],b[n]}={1.25, 1.5}
La nueva aproximación es:
 {x[n],e[n]}={1.25, 0.25}
 en la iteración 2
**********************
El nuevo intervalo es:
 {a[n],b[n]}={1.25, 1.375}
La nueva aproximación es:
 {x[n],e[n]}={1.375, 0.125}
 en la iteración 3
**********************
El nuevo intervalo es:
 {a[n],b[n]}={1.25, 1.3125}
La nueva aproximación es:
 {x[n],e[n]}={1.3125, 0.0625}
 en la iteración 4
**********************
El nuevo intervalo es:
 {a[n],b[n]}={1.28125, 1.3125}
La nueva aproximación es:
```

{x[n],e[n]}={1.28125, 0.03125}

en la iteración 5

****

El nuevo intervalo es:

{a[n],b[n]}={1.28125, 1.29688}

La nueva aproximación es:

{x[n],e[n]}={1.29688, 0.015625}

en la iteración 6

****

El nuevo intervalo es:

{a[n],b[n]}={1.28906, 1.29688}

La nueva aproximación es:

{x[n],e[n]}={1.28906, 0.0078125}

en la iteración 7

****

El nuevo intervalo es:

{a[n],b[n]}={1.28906, 1.29297}

La nueva aproximación es:

{x[n],e[n]}={1.29297, 0.00390625}

en la iteración 8

****

El nuevo intervalo es:

{a[n],b[n]}={1.29102, 1.29297}

La nueva aproximación es:

{x[n],e[n]}={1.29102, 0.00195313}

en la iteración 9

****

El nuevo intervalo es:

{a[n],b[n]}={1.29199, 1.29297}

La nueva aproximación es:

{x[n],e[n]}={1.29199, 0.000976563}

en la iteración 10

****

El nuevo intervalo es:

{a[n],b[n]}={1.29248, 1.29297}

La nueva aproximación es:

{x[n],e[n]}={1.29248, 0.000488281}

en la iteración 11

****

El nuevo intervalo es:

{a[n],b[n]}={1.29248, 1.29272}

La nueva aproximación es:

{x[n],e[n]}={1.29272, 0.000244141}

en la iteración 12

```
**********************
El nuevo intervalo es:
 {a[n],b[n]}={1.2926, 1.29272}
La nueva aproximación es:
 {x[n],e[n]}={1.2926, 0.00012207}
 en la iteración 13
**********************
El nuevo intervalo es:
 {a[n],b[n]}={1.29266, 1.29272}
La nueva aproximación es:
 {x[n],e[n]}={1.29266, 0.0000610352}
 en la iteración 14
**********************
El nuevo intervalo es:
 {a[n],b[n]}={1.29269, 1.29272}
La nueva aproximación es:
 {x[n],e[n]}={1.29269, 0.0000305176}
 en la iteración 15
**********************
El nuevo intervalo es:
 {a[n],b[n]}={1.29269, 1.29271}
La nueva aproximación es:
```

{x[n],e[n]}={1.29271, 0.0000152588}

en la iteración 16

****

El nuevo intervalo es:

{a[n],b[n]}={1.29269, 1.2927}

La nueva aproximación es:

{x[n],e[n]}=$\{1.2927, 7.62939 \times 10^{-6}\}$

en la iteración 17

****

El nuevo intervalo es:

{a[n],b[n]}={1.29269, 1.2927}

La nueva aproximación es:

{x[n],e[n]}=$\{1.2927, 3.8147 \times 10^{-6}\}$

en la iteración 18

****

El nuevo intervalo es:

{a[n],b[n]}={1.29269, 1.2927}

La nueva aproximación es:

{x[n],e[n]}=$\{1.2927, 1.90735 \times 10^{-6}\}$

en la iteración 19

****

El nuevo intervalo es:

{a[n],b[n]}={1.2927, 1.2927}

La raiz aproximada es:

{x[n],e[n]}={1.2927, 9.53674×10^{-7}}

en 20 iteraciones

```
A={{"n","a[n-1]","b[n-1]","x[n]","e[n]","f[x[n]]"}};
B=Table[{n,a[n-1],b[n-1],x[n],e[n],f[x[n]]},{n,1,i-1}];
resultados=TableForm[Join[A,B]]
```

n	a[n−1]	b[n−1]	x[n]	e[n]	f[x[n]]
1	1	2	1.5	0.5	0.152393
2	1	1.5	1.25	0.25	−0.0288176
3	1.25	1.5	1.375	0.125	0.0582919
4	1.25	1.375	1.3125	0.0625	0.0137126
5	1.25	1.3125	1.28125	0.03125	−0.0078275
6	1.28125	1.3125	1.29688	0.015625	0.00287615
7	1.28125	1.29688	1.28906	0.0078125	−0.00249257
8	1.28906	1.29688	1.29297	0.00390625	0.000187606
9	1.28906	1.29297	1.29102	0.00195313	−0.00115353
10	1.29102	1.29297	1.29199	0.000976563	−0.000483225
11	1.29199	1.29297	1.29248	0.000488281	−0.000147875
12	1.29248	1.29297	1.29272	0.000244141	0.0000198491
13	1.29248	1.29272	1.2926	0.00012207	−0.000064017
14	1.2926	1.29272	1.29266	0.0000610352	−0.000022085
15	1.29266	1.29272	1.29269	0.0000305176	-1.11822×10^{-6}
16	1.29269	1.29272	1.29271	0.0000152588	9.36536×10^{-6}
17	1.29269	1.29271	1.2927	7.62939×10^{-6}	4.12355×10^{-6}
18	1.29269	1.2927	1.2927	3.8147×10^{-6}	1.50266×10^{-6}
19	1.29269	1.2927	1.2927	1.90735×10^{-6}	1.92217×10^{-7}
20	1.29269	1.2927	1.2927	9.53674×10^{-7}	-4.63004×10^{-7}

Son necesarias 20 iteraciones y al menos seis dígitos son exactos.