2.- LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL DE UNA VARIABLE PROCEDIMIENTOS

1.- EXISTENCIA DEL LIMITE DE UNA FUNCION EN UN PUNTO

Descripción del método

- 1. Definición de la función y representación gráfica de la misma
- 2. Definición del punto y cálculo de la imagen de la función en dicho punto
- 3. Cálculo de los límites laterales
- 4. Comparación de los límites laterales

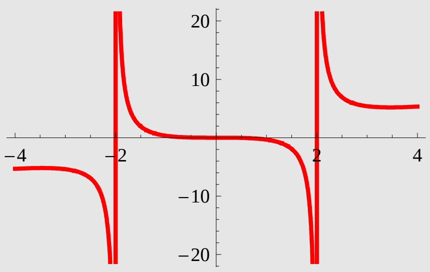
Procedimiento

Estudiar la existencia del límite de la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ en el punto $x = 2$

⇒ 1. Definición de la función y representación gráfica de la misma

$$f[x\_] = \frac{x^3}{x^2 - 4};$$

```
Plot[f[x], {x, -4, 4}, PlotStyle -> {Red, Thickness[0.01]}]
```



⇒ 2. Definición del punto y cálculo de la imagen de la función en dicho punto

```
punto = 2;
```

```
f[punto]
```

Power::infy : Infinite expression $\frac{1}{0}$ encountered. ≫

```
ComplexInfinity
```

⇒ 3. Cálculo de los límites laterales

```
limizq = Limit[f[x], x -> 2, Direction -> 1];
limder = Limit[f[x], x -> 2, Direction → -1];
```

⇒ 4. Comparación de los límites laterales

```
If[limizq == limder,
 Print["los límites laterales son iguales ⇒ existe
    el límite de la función ", f[x],
  " en el punto x = ", punto, " y su valor es ", limizq],
 Print["los límites laterales son distintos ⇒ no existe el
    límite de la función ", f[x], " en el punto x = ", punto]]
```

los límites laterales son distintos ⇒ no existe el límite de la función $\frac{x^3}{-4 + x^2}$ en el punto x = 2

2.- ORDEN Y PARTE PRINCIPAL DE UN INFINITÉSIMO

Calcular el orden y la parte principal de $f(x) = 2\,\mathrm{sen}\,x - \mathrm{sen}\,2x$ en $x = 0$

▼ Procedimiento 1

```
f[x_] = 2 Sin[x] - Sin[2 x];
a = 0;
```

```
For[k=0,k<15,k++,lim[k]=Limit[f[x]/x^k,x->a];If[lim[k]==0,
Print["El orden es mayor que ",k],
Print["El orden de f(x)= ",f[x], "es n=",k",
y la Parte Principal es ppal= ", ppal=lim[k]*x^k];n=k;k=15]]
```

```
El orden es mayor que 0
```

```
El orden es mayor que 1
```

```
El orden es mayor que 2
```

El orden de f(x)= 2 Sin[x] − Sin[2 x]es n=3 , y la Parte Principal es ppal= x^3

Procedimiento 2

b = 15;

$$\text{Do}\left[\text{If}\left[\text{Limit}\left[\frac{f[x]}{(x-a)^n}, x \to a\right] \neq 0 \;\&\&\; \text{Limit}\left[\frac{f[x]}{(x-a)^n}, x \to a\right] \neq \infty \;\&\&\; \text{Limit}\left[\frac{f[x]}{(x-a)^n}, x \to a\right] \neq -\infty, \text{Print}\left[\text{"Infinitésimo de orden ", n, ", su parte principal es ",} \text{Limit}\left[\frac{f[x]}{(x-a)^n}, x \to a\right] * (x-a)^n\right], \text{Stop}\right], \{n, 0, b\}\right]$$

Infinitésimo de orden 3, su parte principal es x^3

3.- COMPARACION DE INFINITESIMOS

Descripción del método

- 1. Definición de los infinitésimos y del punto en el que se van a comparar
- 2. Cálculo del límite cociente de los infinitésimos
- 3. Estudio del valor del límite

Procedimiento

Dadas las funciones $f(x) = \mathrm{Ln}(2 - \cos 2x)$ y $g(x) = \mathrm{Ln}^2(\mathrm{sen}3x + 1)$, indicar el orden infinitesimal de $f(x)$ respecto de $g(x)$ en $x = 0$

⇒ 1. Definición de los infinitésimos y del punto en el que se van a comparar

```
f[x_] = Log[2 - Cos[2 x]]; g[x_] = Log[(Sin[3 x] + 1)]^2;
pto = 0;
```

⇒ 2. Cálculo del límite cociente de los infinitésimos

```
lim = Limit[f[x] / g[x], x → pto];
```

⇒ 3. Estudio del valor del límite

```
If[lim == 0, Print[
  "f(x) es un infinitésimo de orden superior a g(x) en x = ",
  pto], If[lim == ∞, Print[
   "f(x) es un infinitésimo de orden inferior a g(x) en x = ",
   pto], If[lim == -∞, Print[
    "f(x) es un infinitésimo de orden superior a g(x) en x = ",
    pto], If[lim == 1,
    Print["f(x) y g(x) son infinitésimos equivalentes en x = ",
     pto], Print[
     "f(x) y g(x) son infinitésimos del mismo orden en x = ",
     pto, " pero no equivalentes"]]]]]
```

```
f(x) y g(x) son infinitésimos del mismo orden en x = 0 pero no equivalentes
```

4.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES CON ASÍNTOTAS

Descripción del método

1. Obtención del dominio y la imagen de la función

- 2. Cálculo de asíntotas verticales, horizontales u oblícuas

- 3. Representación gráfica de la función, redefiniéndo valores si es necesario para la mejor visualización de la misma

GRÁFICA CON UNA ASÍNTOTA VERTICAL Y OTRA HORIZONTAL

Representar gráficamente la función $\frac{3x^2}{1+x^3}$ determinando previamente su domino y la existencia de asintotas

```
f[x_] = (3*x^2)/(1 + x^3);
```

⇒ 1. Obtención del dominio y la imagen de la función

```
dom = Solve[(x + 1)^2 == 0]
```

```
{{x → -1}, {x → -1}}
```

```
a1 = x /. dom[[1, 1]];
x1 = -5;
x2 = 5;
ε = 0.1;
```

La función no existe en a1=-1, en este punto puede haber asíntota vertical.

⇒ 2. Cálculo de asíntotas

2.1 Asíntota vertical

```
a = a1;
b = Limit[f[x], x → a1];
If[b == -∞, Print["x=a es una asíntota vertical;  a=", a],
 If[b == ∞, Print["x=a es una asíntota vertical;  a=", a],
  Print["No existe asíntota vertical"]]]
```

x=a es una asíntota vertical; a=-1

```
y1 = Max[f[a1 - ε], f[a1 + ε], f[x1], f[x2]] // N
```

8.96679

```
y2 = Min[f[a1 - ε], f[a1 + ε], f[x1], f[x2]] // N
```

-10.9668

2.2 Asíntota horizontal

```
b = Limit[f[x], x → Infinity];
If[b ≠ -∞ && b ≠ ∞, Print["y=b es una asíntota horizontal; b=", b],
  Print["No existe asíntota horizontal; podría haber una asíntota oblicua."]]
```

y=b es una asíntota horizontal; b=0

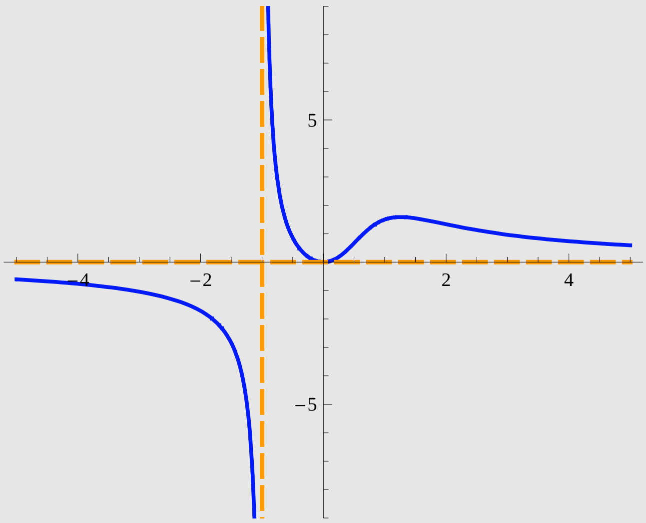
⇒ 3. Representación gráfica de la función

```
y1 = 9;
```

```
y2 = -9;
```

Redefinimos y1 e y2 para mejorar la visión de la gráfica

```
ver1 = {{a1, y1}, {a1, y2}};
horizontal = {{x1, b}, {x2, b}};
v1 = Graphics[{AbsoluteDashing[{10, 5}], RGBColor[1, 0.6`, 0],
   Thickness[0.007], {Line[ver1], Line[horizontal]}}];
g1 = Plot[f[x], {x, x1, a1}, PlotStyle →
    {RGBColor[0, 0.1, 1], Thickness[0.006]}, PlotRange → {y2, y1}];
g2 = Plot[f[x], {x, a1, x2}, PlotStyle → {RGBColor[0, 0.1`, 1],
     Thickness[0.006]}, PlotRange → {y2, y1}];
Show[g1, g2, v1, Ticks → Automatic, PlotRange → {y2, y1},
 AspectRatio → 0.8, AxesOrigin → {0, 0}]
```



▼ GRÁFICA CON DOS ASÍNTOTAS VERTICALES Y UNA HORIZONTAL

Representar gráficamente la función $\dfrac{x^3 - 2x}{(x-1)^2 (x+2)}$ determinando previamente su domino y la existencia de asintotas

```
f[x_] = (x^3 - 2*x) / ((x - 1)^2 (x + 2));
```

⇒ 1. Obtención del dominio y la imagen de la función

```
dom = Solve[(x - 1)^2 (x + 2) == 0]
```

```
{{x → -2}, {x → 1}, {x → 1}}
```

```
a1 = x /. dom[[1, 1]];
a2 = x /. dom[[2, 1]];
x1 = -4;
x2 = 3;
ε = 0.1;
```

Los puntos a1=-2 y a2=1 son los puntos donde no está definida la función, en estos puntos puede haber asíntotas verticales.

⇒ 2. Cálculo de las asíntotas

2.1 Asíntotas Verticales

```
a = a1;
b = Limit[f[x], x → a1];
If[b == -∞, Print["x=a es una asíntota vertical;  a=", a],
 If[b == ∞, Print["x=a es una asíntota vertical;  a=", a],
  Print["No existe asíntota vertical"]]]
```

x=a es una asíntota vertical; a=-2

```
a = a2;
b = Limit[f[x], x → a2];
If[b == -∞, Print["x=a es una asíntota vertical;  a=", a],
 If[b == ∞, Print["x=a es una asíntota vertical;  a=", a],
  Print["No existe asíntota vertical"]]]
```

x=a es una asíntota vertical; a=1

```
y1 = Max[f[a1 - ε], f[a1 + ε], f[a2 - ε], f[a2 + ε]] // N
```

5.26639

```
y2 = Min[f[a1 - ε], f[a1 + ε], f[a2 - ε], f[a2 + ε]] // N
```

-36.931

2.2 Asíntota horizontal

```
b = Limit[f[x], x → Infinity];
If[b ≠ -∞ && b ≠ ∞, Print["y=b es una asíntota horizontal;  b=", b],
  Print["No existe asíntota horizontal; podría haber una asíntota oblicua."]]
```

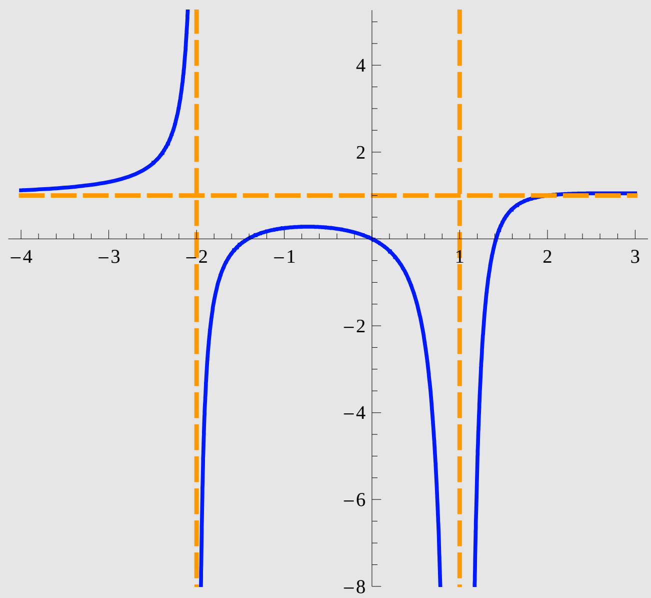
y=b es una asíntota horizontal; b=1

⇒ 3. Representación gráfica de la función

```
y2 = -8;
```

Redefinimos y2 para mejorar la visión de la gráfica

```
horizontal = {{x1, b}, {x2, b}};
ver1 = {{a1, y1}, {a1, y2}};
ver2 = {{a2, y1}, {a2, y2}};
h = Graphics[{AbsoluteDashing[{10, 5}], RGBColor[1, 0.6`, 0],
   Thickness[0.007], Line[horizontal]}];
v1 = Graphics[{AbsoluteDashing[{10, 5}],
    RGBColor[1, 0.6`, 0], Thickness[0.007], Line[ver1]}];
v2 = Graphics[{AbsoluteDashing[{10, 5}], RGBColor[1, 0.6`, 0],
   Thickness[0.007], Line[ver2]}];
g1 = Plot[f[x], {x, x1, a1}, PlotStyle →
   {RGBColor[0, 0.1`, 1], Thickness[0.006]}, PlotRange → {y1, y2}];
g2 = Plot[f[x], {x, a1, a2}, PlotStyle → {RGBColor[0, 0.1`, 1],
     Thickness[0.006]}, PlotRange → {y1, y2}];
g3 = Plot[f[x], {x, a2, x2}, PlotStyle → {RGBColor[0, 0.1`, 1],
     Thickness[0.006]}, PlotRange → {y1, y2}];
Show[g1, g2, g3, h, v1, v2, AxesOrigin → {0, 0}, Ticks → Automatic,
 AspectRatio → 0.9, PlotRange → {{x1, x2}, {y1, y2}}]
```



GRÁFICA CON ASÍNTOTA VERTICAL Y OBLICUA

Representar gráficamente la función $\frac{x^3}{(x+1)^2}$ determinando previamente su domino y la existencia de asintotas

```
f[x_] = x^3/(x + 1)^2;
```

⇒ 1. Obtención del dominio y la imagen de la función

```
dom = Solve[(x + 1)^2 == 0]
```

```
{{x → -1}, {x → -1}}
```

```
a1 = x /. dom[[1, 1]];
x1 = -7;
x2 = 7;
ε = 0.1;
```

El puntos a1=-1 es el único punto donde la función no está definida, en este punto puede haber asíntota vertical.

⇒ 2. Cálculo de asíntotas

2.1 Asíntota vertical

```
a = a1;
b = Limit[f[x], x → a1];
If[b == -∞, Print["x=a es una asíntota vertical; a=", a],
 If[b == ∞, Print["x=a es una asíntota vertical; a=", a],
  Print["No existe asíntota vertical"]]]
```

x=a es una asíntota vertical; a=-1

```
y1 = Max[f[a1 - ε], f[a1 + ε], f[x1], f[x2]] // N
```

```
5.35938
```

```
y2 = Min[f[a1 - ε], f[a1 + ε], f[x1], f[x2]] // N
```

```
-133.1
```

2.2 Asíntota horizontal

```
b = Limit[f[x], x → Infinity];
If[b ≠ -∞ && b ≠ ∞, Print["y=b es una asíntota horizontal; b=", b],
 Print["No existe asíntota horizontal; podría haber una asíntota oblicua."]]
```

No existe asíntota horizontal; podría haber una asíntota oblicua.

2.3 Asíntota oblícua

```
m = Limit[f[x] / x, x → Infinity];
n = Limit[f[x] - m * x, x → Infinity];
If[m ≠ -∞ && m ≠ ∞,
 If[n ≠ -∞ && n ≠ ∞, Print["la asíntota oblicua es:  y=", m * x + n],
  Print["No existe asíntota oblicua"]], Print["No existe asíntota oblicua"]]
```

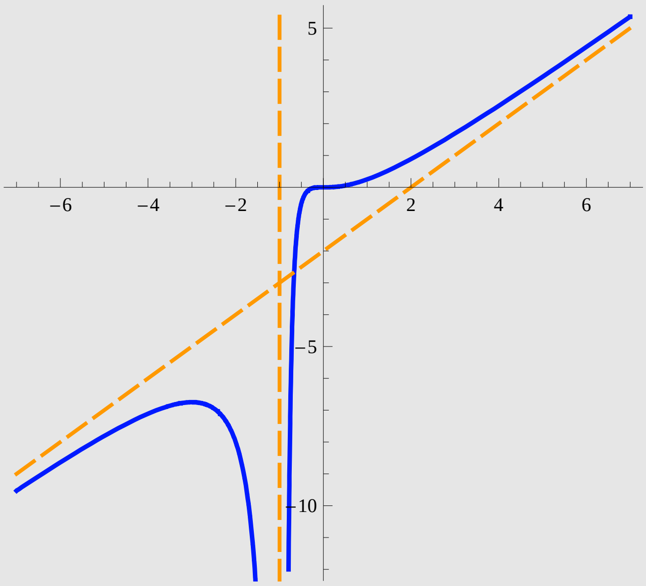
la asíntota oblicua es: y=-2 + x

⇒ 3. Representación gráfica de la función

```
y2 = -12;
```

Redefinimos y2 para mejorar la visión de la gráfica

```
ver1 = {{a1, y1}, {a1, y2}};
asinobli = {{x1, m * x1 + n}, {x2, m * x2 + n}};
v1 = Graphics[{AbsoluteDashing[{10, 5}], RGBColor[1, 0.6`, 0],
   Thickness[0.006], Line[ver1]}, DisplayFunction → Identity];
ao = Graphics[{AbsoluteDashing[{10, 5}], RGBColor[1, 0.6`, 0],
    Thickness[0.006], Line[asinobli]}];
g1 = Plot[f[x], {x, x1, a1}, PlotStyle →
    {RGBColor[0, 0.1`, 1], Thickness[0.007]}];
g2 = Plot[f[x], {x, a1, x2}, PlotRange → {y1, y2},
   PlotStyle → {RGBColor[0, 0.1`, 1], Thickness[0.007]}];
etiquetas = {Text["x=-1", {3, 19}], Text["y=x ", {8, 6.7`}]};
Show[g1, g2, v1, ao, Ticks → Automatic,
 AspectRatio → 0.9`, Epilog → Graphics[etiquetas][[1]],
 PlotRange → {{x1, x2}, {y1, y2}}, AxesOrigin → {0, 0}]
```



GRÁFICA CON DOS ASÍNTOTAS VERTICALES Y UNA OBLICUA

Representar gráficamente la función $\frac{x^3}{x^2 - 4}$ determinando previamente su domino y la existencia de asintotas

```
f[x_] = x^3/(x^2 - 4);
```

$$f[x\_] = \frac{x^3}{x^2 - 4};$$

⇒ 1. Obtención del dominio y la imagen de la función

```
dom = Solve[x^2 - 4 == 0]
```

```
{{x → -2}, {x → 2}}
```

```
a1 = x /. dom[[1, 1]];
a2 = x /. dom[[2, 1]];
x1 = -10;
x2 = 10;
ε = 0.1;
```

Los puntos a1=-2 y a2=2 son los puntos de discontinuidad de la función, donde además puede haber asíntotas verticales.

⇒ 2. Cálculo de asíntotas

2.1 Asíntotas verticales

```
a = a1;
b = Limit[f[x], x → a1];
If[b == -∞, Print["x=a es una asíntota vertical; a=", a],
 If[b == ∞, Print["x=a es una asíntota vertical; a=", a],
  Print["No existe asíntota vertical"]]]
```

```
x=a es una asíntota vertical; a=-2
```

```
a = a2;
b = Limit[f[x], x → a2];
If[b == -∞, Print["x=a es una asíntota vertical; a=", a],
 If[b == ∞, Print["x=a es una asíntota vertical; a=", a],
  Print["No existe asíntota vertical"]]]
```

```
x=a es una asíntota vertical; a=2
```

```
y1 = Max[f[a1 - ε], f[a1 + ε], f[a2 - ε], f[a2 + ε]] // N
```

```
22.5878
```

```
y2 = Min[f[a1 - ε], f[a1 + ε], f[a2 - ε], f[a2 + ε]] // N
```

```
-22.5878
```

2.2 Asíntota horizontal

```
b = Limit[f[x], x → Infinity];
If[b ≠ -∞ && b ≠ ∞, Print["y=b es una asíntota horizontal; b=", b],
 Print["No existe asíntota horizontal; podría haber una asíntota oblicua."]]
```

No existe asíntota horizontal; podría haber una asíntota oblicua.

2.3 Asíntota oblícua

```
m = Limit[f[x] / x, x → Infinity];
n = Limit[f[x] - m * x, x → Infinity];
If[m ≠ -∞ && m ≠ ∞,
 If[n ≠ -∞ && n ≠ ∞, Print["la asíntota oblicua es: y=", m * x + n],
  Print["No existe asíntota oblicua"]], Print["No existe asíntota oblicua"]]
```

la asíntota oblicua es: y=x

⇒ 3. Representación gráfica de la función

```
ver1 = {{a1, y1}, {a1, y2}};
ver2 = {{a2, y1}, {a2, y2}};
asinobli = {{x1, m * x1 + n}, {x2, m * x2 + n}};
v1 = Graphics[{AbsoluteDashing[{10, 5}],
   RGBColor[1, 0.6`, 0], Thickness[0.007], Line[ver1]}];
v2 = Graphics[{AbsoluteDashing[{10, 5}],
    RGBColor[1, 0.6`, 0], Thickness[0.007], Line[ver2]}];
ao = Graphics[{AbsoluteDashing[{10, 5}], RGBColor[1, 0.6`, 0],
    Thickness[0.007], Line[asinobli]}];
g1 = Plot[f[x], {x, x1, a1}, PlotRange → {{x1, x2}, {y1, y2}},
   PlotStyle → {RGBColor[0, 0.1`, 1], Thickness[0.007]}];
g2 = Plot[f[x], {x, a1, a2}, PlotRange → {{x1, x2}, {y1, y2}},
   PlotStyle → {RGBColor[0, 0.1`, 1], Thickness[0.007]}];
g3 = Plot[f[x], {x, a2, x2}, PlotRange → {{x1, x2}, {y1, y2}},
   PlotStyle → {RGBColor[0, 0.1`, 1], Thickness[0.007]}];
Show[g1, g2, g3, v1, v2, ao, Ticks → Automatic, AspectRatio → 0.9`]
```