2.- LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL APLICACIONES PRÁCTICAS

EJERCICIO 1

La función f (x) = Ln $\frac{11-3x}{10+x}$ es un infinitésimo cuando x→ $\frac{1}{4}$. Calcular su orden y parte principal.

Definimos la función f (x) , el punto a en el que vamos a calcular el límite y el valor b que es el máximo orden que vamos a probar para el infinitésimo

```
f[x_] = Log[(11 - 3 x) / (10 + x)];
a = 1/4; b = 10;
```

Repetimos el cálculo del límite para valores desde n=0 hasta n=10 hasta encontrar el valor de n que hace que el límite sea distinto de cero y de infinito, calculando de esta forma el orden del infinitésimo en el punto *x*=a y con el su parte principal

```
Do[If[Limit[f[x]/(x - a)^n, x → a] ≠ 0 &&
   Limit[f[x]/(x - a)^n, x → a] ≠ ∞ && Limit[f[x]/(x - a)^n, x → a] ≠ -∞,
  Print["Infinitésimo de orden ", n, ", su parte principal es ",
   Limit[f[x]/(x - a)^n, x → a] * (x - a)^n], Stop], {n, 0, b}]
```

Infinitésimo de orden 1, su parte principal es $-\frac{16}{41}\left(-\frac{1}{4}+x\right)$

EJERCICIO 2

Calcular el orden y la parte principal de las funciones $f(x) = e^{5x} - e^{3x}$ y g(x)= *sen(5x)-sen(3x)* cuando *x->0* . Utilizarlo para calcular $\lim_{x \to 0} \frac{e^{5x} - e^{3x}}{sen(5x) - sen(3x)}$

▼ Cálculo del orden y de la parte principal de la función f(x)

Definimos la función f(x) que es un infinitésimo en el punto a=0

```
f[x_] = E^(5 x) - E^(3 x);
a = 0; b = 10;
```

Calculemos el orden y la parte principal de f(x)

```
Do[If[Limit[f[x]/(x - a)^n, x → a] ≠ 0 &&
   Limit[f[x]/(x - a)^n, x → a] ≠ ∞ && Limit[f[x]/(x - a)^n, x → a] ≠ -∞,
  Print["Infinitésimo de orden ", n, ", su parte principal es ",
   ppal = Limit[f[x]/(x - a)^n, x → a] * (x - a)^n], Stop], {n, 0, b}]
```

```
Infinitésimo de orden 1, su parte principal es 2 x
```

```
ppalf[x_] = ppal
```

```
2 x
```

▼ Cálculo del orden y de la parte principal de la función g(x)

Definimos la función g(x) que es un infinitésimo en el punto a=0

```
g[x_] = Sin[5 x] - Sin[3 x];
a = 0; b = 10;
```

Calculemos el orden y la parte principal de g(x)

```
Do[If[Limit[g[x]/(x - a)^n, x → a] ≠ 0 &&
    Limit[g[x]/(x - a)^n, x → a] ≠ ∞ && Limit[g[x]/(x - a)^n, x → a] ≠ -∞,
   Print["Infinitésimo de orden ", n, ", su parte principal es ",
    ppal = Limit[g[x]/(x - a)^n, x → a] * (x - a)^n], Stop], {n, 0, b}]
```

```
Infinitésimo de orden 1, su parte principal es 2 x
```

```
ppalg[x_] = ppal
```

```
2 x
```

Cálculo del límite

```
Limit[ppalf[x]/ppalg[x], x -> 0]
```

```
1
```

EJERCICIO 3

Dadas las funciones $i(x) = p\ \mathrm{Sen}(\mathrm{Ln}(1+x))\ \mathrm{Ln}[\frac{1+x}{1-x}]$ y $j(x) = 1-\cos(\mathrm{Ln}(1+x))$,

a) Demostrar que son infinitésimos en x=0.

b) Hallar el valor de p para que sean infinitésimos equivalentes.

Apartado a

```
i[x_] = p * Sin[Log[1 + x]] * Log[(1 + x)/(1 - x)];
j[x_] = 1 - Cos[Log[1 + x]];
a = 0;
```

Hay que ver si el límite de cada función en el punto x = 0 vale 0

```
If[Limit[i[x], x → a] == 0, Print["la función i[x]=",
  i[x], "es un infinitésimo cuando x->", a],
 Print["la función i[x]=", i[x],
  "no es un infinitésimo cuando x->", a]]
```

la función i[x]=p Cos[Log[1 + x]] $\text{Log}\left[\frac{1+x}{1-x}\right]$es un infinitésimo cuando x->0

```
If[Limit[j[x], x → a] == 0, Print["la función i[x]=",
  j[x], "es un infinitésimo cuando x->", a],
 Print["la función i[x]=", j[x],
  "no es un infinitésimo cuando x->", a]]
```

la función i[x]=1 - Cos[Log[1 + x]]es un infinitésimo cuando x->0

Apartado b

Hay que calcular el valor de p que hace que el límite del cociente de ambas funciones en x=0 valga 1

$$\text{Solve}\left[\text{Limit}\left[\frac{i[x]}{j[x]}, x \to a\right] == 1, p\right]$$

$$\left\{\left\{p \to \frac{1}{4}\right\}\right\}$$

EJERCICIO 4

Demostrar que $\sqrt[3]{1+x}$ - 1 es un infinitésimo equivalente a $\frac{x}{3}$ cuando x→0. Utilizar ese resultado para calcular un valor aproximado de $\sqrt[3]{0,987}$.

Comprobamos que el límite de su cociente en x = 0 vale 1

$$f[x\_] = \sqrt[3]{1+x} - 1;$$
$$g[x\_] = \frac{x}{3};$$
$$\text{Limit}\left[\frac{f[x]}{g[x]}, x \to 0\right] == 1$$

True

Esto supone que $\sqrt[3]{1+x}$ -1≃$\frac{x}{3}$cuando x→0. Por tanto se cumple que $\sqrt[3]{1+x} \simeq \frac{x}{3}$+1 cuando x→0. Identificamos $\sqrt[3]{1+x}$ con

$\sqrt[3]{0,987}$ y calculamos el valor de x.

```
h[x_] = g[x] + 1;
```

```
s = Solve[1 + x == 0.987]
```

```
{{x → -0.013}}
```

x vale 0,013 valor muy próximo a 0 y por tanto podemos aplicar la segunda parte de la igualdad $\sqrt[3]{1+x} = \frac{x}{3} + 1$ para obtener el valor de $\sqrt[3]{0,987}$

```
h[x /. Flatten[s]]
```

```
0.995667
```

Comprobación

$$\sqrt[3]{0.987}$$

```
0.995648
```

EJERCICIO 5

Representar gráficamente la función $y = \sqrt{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}$, determinando previamente su dominio y la existencia de asíntotas.

$$f[x\_] = \sqrt{\text{Abs}\left[\frac{x-1}{x+1}\right]};$$

Rango: Dominio e Imagen

```
dom = Solve[x + 1 == 0]
```

```
{{x → -1}}
```

```
a1 = x /. dom[[1, 1]];
x1 = -5;
x2 = 6;
ε = 0.1;
a2 = 1;
```

La función no existe en a1=-1, en este punto puede haber asíntota vertical. En a2=1, el valor absoluto tiene un punto anguloso

Asíntotas verticales

```
a = a1;
b = Limit[f[x], x → a1];
If[b == -∞, Print["x=a es una asíntota vertical; a=", a],
 If[b == ∞, Print["x=a es una asíntota vertical; a=", a],
  Print["No existe asíntota vertical"]]]
```

x=a es una asíntota vertical; a=-1

```
y1 = Max[f[a1 - ε], f[a1 + ε], f[x1], f[x2]] // N
```

4.58258

```
y2 = Min[f[a1 - ε], f[a1 + ε], f[x1], f[x2]] // N
```

0.845154

```
ver1 = {{a1, y1}, {a1, y2}};
```

Asíntotas horizontales

```
b = Limit[f[x], x → Infinity];
If[b ≠ -∞ && b ≠ ∞, Print["y=b es una asíntota horizontal; b=", b],
 Print["No existe asíntota horizontal; podría haber una asíntota oblicua."]]
```

y=b es una asíntota horizontal; b=1

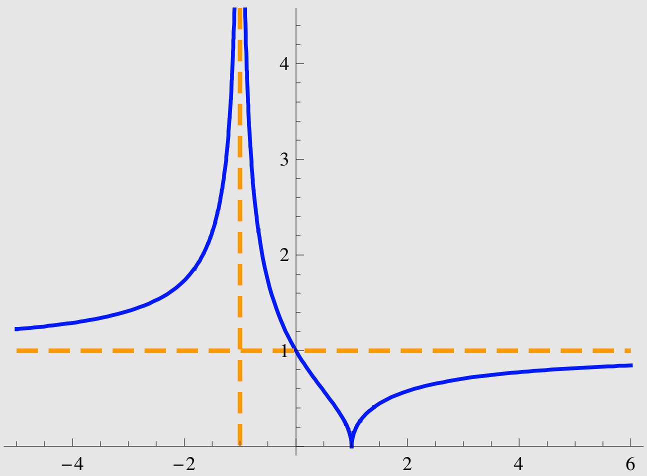
```
horizontal = {{x1, b}, {x2, b}};
```

Gráfica de la función

```
y2 = -0.1;
```

Redefinimos y2 para mejorar la visión de la gráfica

```
ver1 = {{a1, y1}, {a1, y2}};
horizontal = {{x1, b}, {x2, b}};
v1 = Graphics[{AbsoluteDashing[{10, 5}], RGBColor[1, 0.6`, 0],
   Thickness[0.007], {Line[ver1], Line[horizontal]}}];
g1 = Plot[f[x], {x, x1, a1}, PlotStyle →
    {RGBColor[0, 0.1, 1], Thickness[0.006]}, PlotRange → {y2, y1}];
g2 = Plot[f[x], {x, a1, a2}, PlotStyle → {RGBColor[0, 0.1`, 1],
     Thickness[0.006]}, PlotRange → {y2, y1}];
g3 = Plot[f[x], {x, a2, x2}, PlotStyle → {RGBColor[0, 0.1`, 1],
     Thickness[0.006]}, PlotRange → {y2, y1}];
Show[g1, g2, g3, v1, Ticks → Automatic, PlotRange →
  {{x1, x2}, {y2, y1}}, AspectRatio → 0.7, AxesOrigin → {0, 0}]
```



EJERCICIO 6

Representar gráficamente la función $y = (x - 3) + \frac{4}{(x-5)}$, determiando previamente su dominio y la existencia de asíntotas.

```
f[x_] = (x - 3) + 4/(x - 5);
```

▼ Rango: Dominio e Imagen

```
dom = Solve[(x - 5) == 0]
```

```
{{x → 5}}
```

```
a1 = x /. dom[[1, 1]];
x1 = -3;
x2 = 10;
ε = 0.1;
```

El punto a1=5 es un punto donde no está definida la función, donde además puede haber una asíntota vertical.

Asíntotas verticales

```
a = a1;
b = Limit[f[x], x → a1];
If[b == -∞, Print["x=a es una asíntota vertical; a=", a],
 If[b == ∞, Print["x=a es una asíntota vertical; a=", a],
  Print["No existe asíntota vertical"]]]
```

x=a es una asíntota vertical; a=5

```
y1 = Max[f[a1 - ε], f[a1 + ε], f[x1], f[x2]] // N
```

42.1

```
y2 = Min[f[a1 - ε], f[a1 + ε], f[x1], f[x2]] // N
```

-38.1

Asíntotas horizontales

```
b = Limit[f[x], x → Infinity];
If[b ≠ -∞ && b ≠ ∞, Print["y=b es una asíntota horizontal; b=", b],
 Print["No existe asíntota horizontal; podría haber una asíntota oblicua."]]
```

No existe asíntota horizontal; podría haber una asíntota oblicua.

Asíntotas oblícuas

```
m = Limit[f[x] / x, x → Infinity];
n = Limit[f[x] - m * x, x → Infinity];
If[m ≠ -∞ && m ≠ ∞,
 If[n ≠ -∞ && n ≠ ∞, Print["La asíntota oblicua es: y=", m * x + n],
  Print["No existe asíntota oblicua"]], Print["No existe asíntota oblicua"]]
```

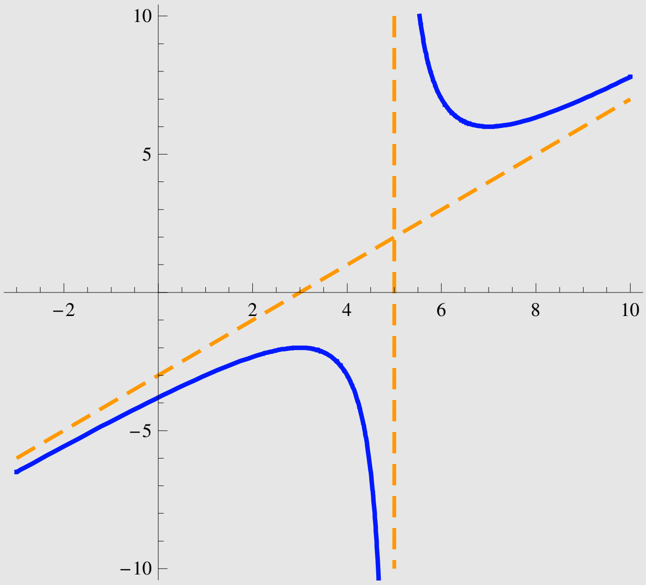
La asíntota oblicua es: y=-3 + x

Gráfica de la función

```
y1 = 10;
y2 = -10;
```

Redefinimos y1 e y2 para mejorar la visión de la gráfica

```
ver1 = {{a1, y1}, {a1, y2}};
asinobli = {{x1, m * x1 + n}, {x2, m * x2 + n}};
v1 = Graphics[{AbsoluteDashing[{10, 5}], RGBColor[1, 0.6`, 0],
   Thickness[0.006], Line[ver1]}, DisplayFunction → Identity];
ao = Graphics[{AbsoluteDashing[{10, 5}], RGBColor[1, 0.6`, 0],
    Thickness[0.006], Line[asinobli]}];
g1 = Plot[f[x], {x, x1, a1}, PlotStyle →
    {RGBColor[0, 0.1`, 1], Thickness[0.007]}];
g2 = Plot[f[x], {x, a1, x2}, PlotRange → {y1, y2},
   PlotStyle → {RGBColor[0, 0.1`, 1], Thickness[0.007]}];
Show[g1, g2, v1, ao, Ticks → Automatic, AspectRatio → 0.9`,
 PlotRange → {{x1, x2}, {y1, y2}}, AxesOrigin → {0, 0}]
```



EJERCICIO 7

Representar gráficamente la función y = $\frac{x}{x^2-1}$, determiando previamente su dominio y la existencia de asíntotas.

```
f[x_] = x / (x^2 - 1);
```

Rango: Dominio e Imagen

```
dom = Solve[x^2 - 1 == 0]
```

```
{{x → -1}, {x → 1}}
```

```
a1 = x /. dom[[1, 1]];
a2 = x /. dom[[2, 1]];
x1 = a1 - 2;
x2 = a2 + 2;
ε = 0.1;
```

Los puntos a1=-2 y a2=1 son los puntos de discontinuidad de la función, donde además puede haber asíntotas verticales.

Asíntotas verticales

```
a = a1;
b = Limit[f[x], x → a1];
If[b == -∞, Print["x=a es una asíntota vertical; a=", a],
 If[b == ∞, Print["x=a es una asíntota vertical; a=", a],
  Print["No existe asíntota vertical"]]]
```

x=a es una asíntota vertical; a=-1

```
a = a2;
b = Limit[f[x], x → a2];
If[b == -∞, Print["x=a es una asíntota vertical; a=", a],
 If[b == ∞, Print["x=a es una asíntota vertical; a=", a],
  Print["No existe asíntota vertical"]]]
```

x=a es una asíntota vertical; a=1

```
y1 = Max[f[a1 - ε], f[a1 + ε], f[a2 - ε], f[a2 + ε]] // N
```

```
5.2381
```

```
y2 = Min[f[a1 - ε], f[a1 + ε], f[a2 - ε], f[a2 + ε]] // N
```

```
-5.2381
```

Asíntotas horizontales

```
b = Limit[f[x], x → Infinity];
If[b ≠ -∞ && b ≠ ∞, Print["y=b es una asíntota horizontal;  b=", b],
  Print["No existe asíntota horizontal; podría haber una asíntota oblicua."]]
```

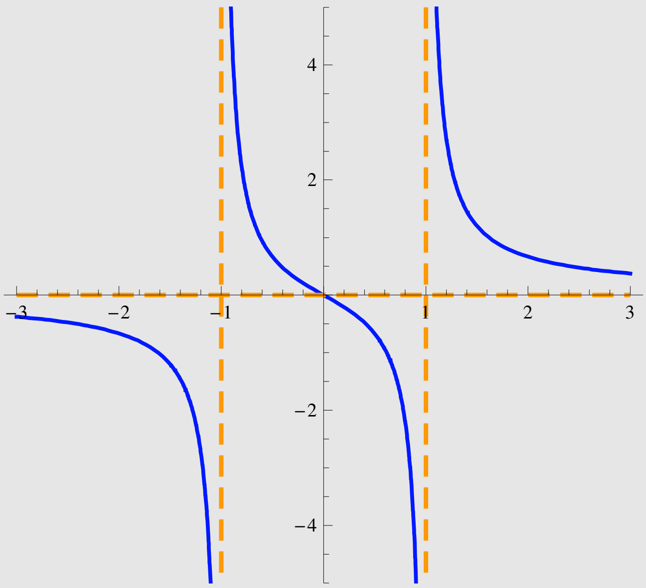
y=b es una asíntota horizontal; b=0

Gráfica de la función

```
y1 = 5;
y2 = -5;
```

Redefinimos y1 e y2 para mejorar la visión de la gráfica

```
horizontal = {{x1, b}, {x2, b}};
ver1 = {{a1, y1}, {a1, y2}};
ver2 = {{a2, y1}, {a2, y2}};
h = Graphics[{AbsoluteDashing[{10, 5}], RGBColor[1, 0.6`, 0],
   Thickness[0.007], Line[horizontal]}];
v1 = Graphics[{AbsoluteDashing[{10, 5}],
    RGBColor[1, 0.6`, 0], Thickness[0.007], Line[ver1]}];
v2 = Graphics[{AbsoluteDashing[{10, 5}], RGBColor[1, 0.6`, 0],
   Thickness[0.007], Line[ver2]}];
g1 = Plot[f[x], {x, x1, a1}, PlotStyle →
   {RGBColor[0, 0.1`, 1], Thickness[0.006]}, PlotRange → {y1, y2}];
g2 = Plot[f[x], {x, a1, a2}, PlotStyle → {RGBColor[0, 0.1`, 1],
     Thickness[0.006]}, PlotRange → {y1, y2}];
g3 = Plot[f[x], {x, a2, x2}, PlotStyle → {RGBColor[0, 0.1`, 1],
     Thickness[0.006]}, PlotRange → {y1, y2}];
Show[g1, g2, g3, h, v1, v2, AxesOrigin → {0, 0}, Ticks → Automatic,
 AspectRatio → 0.9, PlotRange → {{x1, x2}, {y1, y2}}]
```



EJERCICIO 8

Representar gráficamente la función $y = \frac{x^2(2x-1)}{2x^2-1}$, determiando previamente su dominio y la existencia de asíntotas.

```
f[x_] = x^2 * (2 x - 1) / (2 x^2 - 1);
```

Rango: Dominio e Imagen

```
dom = Solve[2 x^2 - 1 == 0]
```

$\left\{\left\{x \to -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{x \to \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$

```
a1 = x /. dom[[1, 1]];
a2 = x /. dom[[2, 1]];
x1 = -2.3;
x2 = 2;
ε = 0.1;
```

Los puntos a1 y a2 son los puntos donde no existe la función, donde además puede haber asíntotas verticales.

Asíntotas verticales

```
a = a1;
b = Limit[f[x], x → a1];
If[b == -∞, Print["x=a es una asíntota vertical; a=", a],
 If[b == ∞, Print["x=a es una asíntota vertical; a=", a],
  Print["No existe asíntota vertical"]]]
```

x=a es una asíntota vertical; $a=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

```
a = a2;
b = Limit[f[x], x → a2];
If[b == -∞, Print["x=a es una asíntota vertical; a=", a],
 If[b == ∞, Print["x=a es una asíntota vertical; a=", a],
  Print["No existe asíntota vertical"]]]
```

x=a es una asíntota vertical; $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$

```
y1 = Max[f[a1 - ε], f[a1 + ε], f[a2 - ε], f[a2 + ε]] // N
```

3.10494

```
y2 = Min[f[a1 - ε], f[a1 + ε], f[a2 - ε], f[a2 + ε]] // N
```

-5.62323

Asíntotas gorizontales

```
b = Limit[f[x], x → Infinity];
If[b ≠ -∞ && b ≠ ∞, Print["y=b es una asíntota horizontal;  b=", b],
 Print["No existe asíntota horizontal; podría haber una asíntota oblicua."]]
```

No existe asíntota horizontal; podría haber una asíntota oblicua.

Asíntotas oblícuas

```
m = Limit[f[x] / x, x → Infinity];
n = Limit[f[x] - m * x, x → Infinity];
If[m ≠ -∞ && m ≠ ∞,
 If[n ≠ -∞ && n ≠ ∞, Print["la asíntota oblicua es:  y=", m * x + n],
  Print["No existe asíntota oblicua"]], Print["No existe asíntota oblicua"]]
```

la asíntota oblicua es: $y = -\frac{1}{2} + x$

Gráfica de la función

```
y2 = -3;
```

Redefinimos y2 para mejorar la visión de la gráfica

```
ver1 = {{a1, y1}, {a1, y2}};
ver2 = {{a2, y1}, {a2, y2}};
asinobli = {{x1, m * x1 + n}, {x2, m * x2 + n}};
v1 = Graphics[{AbsoluteDashing[{10, 5}],
   RGBColor[1, 0.6`, 0], Thickness[0.007], Line[ver1]}];
v2 = Graphics[{AbsoluteDashing[{10, 5}],
    RGBColor[1, 0.6`, 0], Thickness[0.007], Line[ver2]}];
ao = Graphics[{AbsoluteDashing[{10, 5}], RGBColor[1, 0.6`, 0],
    Thickness[0.007], Line[asinobli]}];
g1 = Plot[f[x], {x, x1, a1}, PlotRange → {{x1, x2}, {y1, y2}},
   PlotStyle → {RGBColor[0, 0.1`, 1], Thickness[0.007]}];
g2 = Plot[f[x], {x, a1, a2}, PlotRange → {{x1, x2}, {y1, y2}},
   PlotStyle → {RGBColor[0, 0.1`, 1], Thickness[0.007]}];
g3 = Plot[f[x], {x, a2, x2}, PlotRange → {{x1, x2}, {y1, y2}},
   PlotStyle → {RGBColor[0, 0.1`, 1], Thickness[0.007]}];
Show[g1, g2, g3, v1, v2, ao, Ticks → Automatic, AspectRatio → 0.9`]
```