6.5. PRÁCTICAS PROPUESTAS.- SIGNIFICADO Y APLICACIONES DE LAS DERIVADAS.

6.1 Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 112 m/s. Si la ley del movimiento es $s(t) = 112t - 16t^2$, siendo s(t) la distancia al punto de partida en cada instante t, calcular:

a) La velocidad y la aceleración en los instantes t=3 y t=4.

b) La altura máxima alcanzada.

c) El tiempo que tardará en llegar a una altura de 96 m.

6.2 Determinar los puntos de máximo y de mínimo absolutos en el intervalo $[0, 2\pi]$ de la función $f(\beta) = 4\cos(\beta/2) + \beta$

6.3 Una empresa farmacéutica fabrica penicilina líquida, la cual vende al precio de 200 euros la unidad. El coste total de la producción viene dado por la función $C(x) = 500000 + 80x + 0.003x^2$, donde x es el número de unidades producidas. Si la capacidad de producción de la fábrica es de 15000 unidades en un determinado periodo de tiempo:

a) ¿Cuántas unidades de penicilina debe producir en ese periodo de tiempo para obtener el beneficio máximo? ¿A cuánto asciende ese beneficio?

b) ¿Cuántas unidades debería producir para obtener la pérdida máxima?

c) ¿Cuál sería esa pérdida?

NOTA: Debido a la capacidad de producción de la fábrica debes trabajar con valores de x pertenecientes al intervalo [0 , 15000].

6.4 Una empresa introduce un nuevo producto para el que nº de unidades vendidas es de $p(t)=200\left(5-\dfrac{9}{2+t}\right)$, donde t es el tiempo medido en meses. Se pide:

1) Hallar la razón media de cambio de p(t) en el primer año.

2) En que mes ha sido p′(t) igual a esa razón media de cambio.

6.5 Dada la función $f(x)=1-\sqrt[3]{(x-1)^2}$. Se pide:

1) Estudiar su continuidad y derivabilidad en el intervalo $[0,2]$.

2) ¿Verifica dicha función las condiciones del teorema de Rolle en el citado intervalo? Justifique su respuesta.

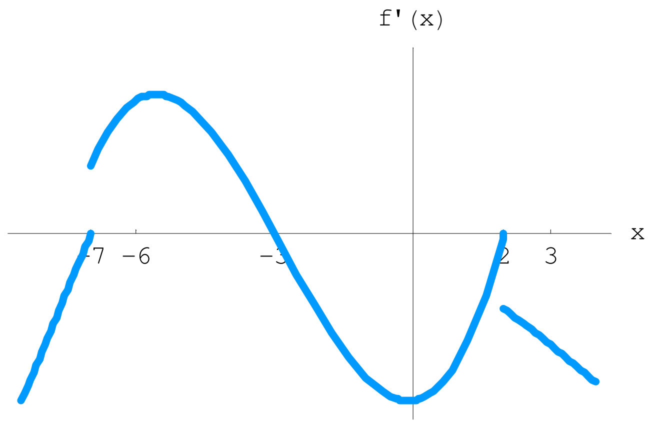
6.6 Sea f una función real de variable real tal de la que conocemos la gráfica de su función derivada f´(x). Para cada una de las funciones descritas en las figuras dadas (gráficas 1, 2 y 3), determinar:

a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

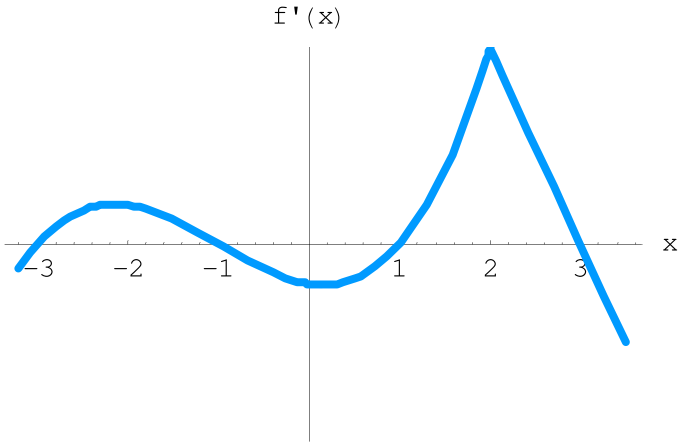
b) Puntos de máximo y mínimo relativos.

c) Intervalos de concavidad y convexidad.

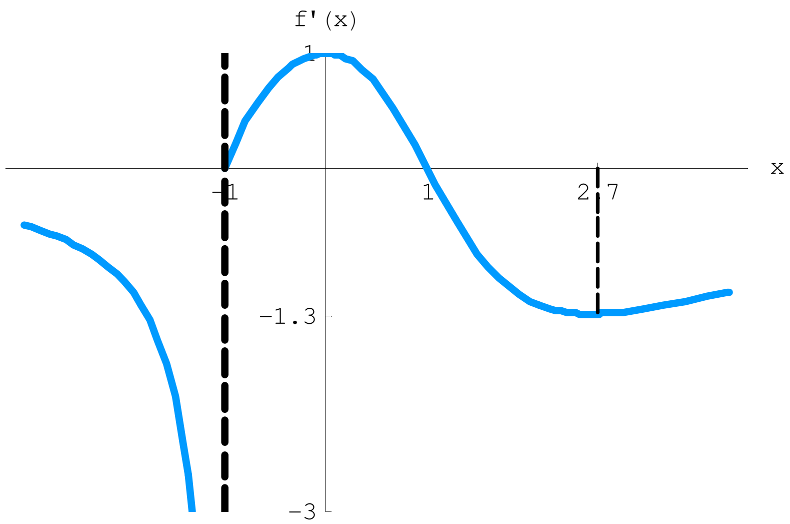
d) Punto de inflexión.



Gráfica1



Gráfica2



Gráfica3

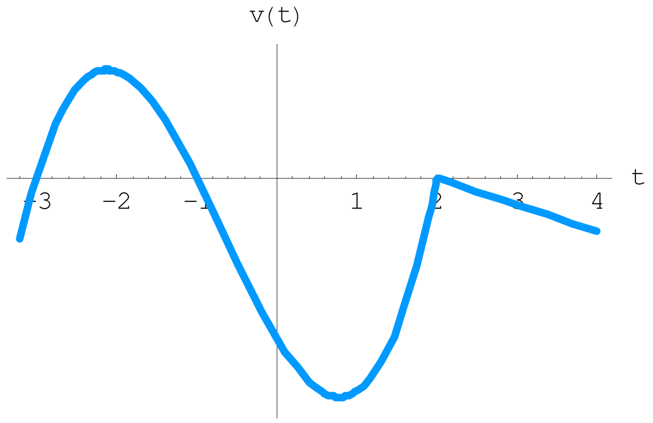
6.7 Una partícula se mueve a lo largo de una recta. Si v(t) es la velocidad de la partícula en cada instante t y su gráfica viene dada por la Figura 4, describir el movimiento de la partícula. Es decir, determinar:

a) Intervalos de tiempo en los que marcha en sentido contrario.

b) Puntos de velocidad máxima y mínimo relativos.

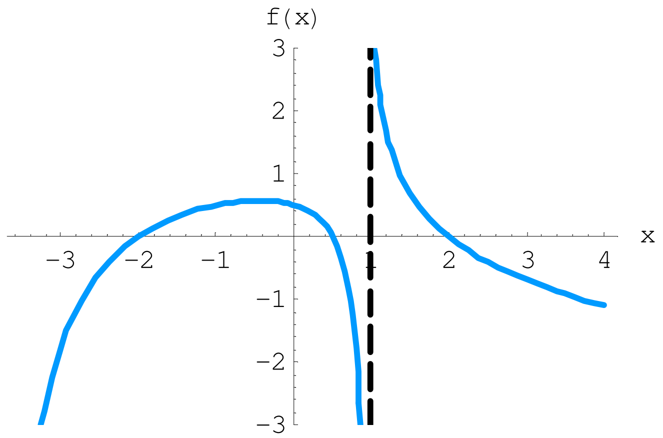
c) Intervalos de de aceleración positiva o negativa.

d) Esbozar la gráfica de s(t), que representa la posición de la partícula en cada instante t.



Gráfica4

6.8 Sea $f: IR \rightarrow IR$ una función real de variable real cuya gráfica viene dada por:



Gráfica5

1) Estudiar su continuidad y derivabilidad en el intervalo $[-3,2]$.

2) ¿Verifica dicha función las condiciones del teorema de Rolle en el citado intervalo? Justifique su respuesta.

6.9 En un sistema de ejes coordenados rectangulares OXY se considera el segmento del eje OY comprendido entre los puntos (0,a) y (0,b). Determinar el punto sobre el eje OX desde el que se observa dicho segmento bajo un ángulo máximo.

6.10 Un segmento rectilíneo de longitud x se mueve libremente por una superficie formada por dos pasillos de anchuras 27 y 8 metros que se cortan en ángulo recto. ¿Cual es el segmento de mayor longitud x que puede pasar del tramo de 27m al de 8m?.

6.11 Dos casas A y B están situadas a 5 Km una de otra y ambas a un mismo lado de una carretera, siendo sus distancias a dicha carretera de 6 y 3 Km respectivamente. Hallar la longitud mínima de un camino ACB que lleve de la casa A a la carretera y de ésta a la casa B.

6.12 Un sujeto situado en el borde de una piscina circular quiere trasladarse al punto de la misma diametralmente opuesto del que se encuentra. Andando por el borde avanzan el doble que nadando. Si elige un itinerario en el que hace parte del recorrido nadando y la otra parte andando ¿ Con qué itinerario tardará menos tiempo en llegar? Y ¿ Con qué itinerario tardará más tiempo en llegar?

6.13 Un hombre atraviesa un puente a la velocidad de 5 Km/h y, al mismo tiempo, una canoa pasa perpendicularmente por debajo del puente a una velocidad de 14 Km/h. Determinar el instante en el que la distancia del hombre a la canoa es mínima, sabiendo que el puente se halla a 6 m por encima del agua y que, en el instante t = 0, el hombre se encuentra a 16 Km del punto O situado en el centro del puente y la canoa a una distancia de 20 m de la proyección O' del punto O sobre el río.

Nota: El hombre se dirige hacia el punto O y la canoa hacia O´.

6.14 Las agujas de un reloj miden 8 y 6 cm. Unimos sus extremos formando un triángulo. Se pide:

1) Expresar el área del triángulo en función del tiempo.
2) Determinar el instante comprendido entre la 12h y las 12h:30mn para el que el área de dicho triángulo es máxima.
3) Hallar dicha área.

Sugerencia:comprobar previammente que el área del triángulo es $= \frac{8.10}{2}$ sen α, siendo α el ángulo que forman las agujas del reloj.

6.15 En un sistema tridimensional de ejes coordenados rectangulares, se define el movimiento rectilíneo, en función del tiempo, de tres móviles sobre cada uno de sus ejes por:

$$s_x(t) = 2t;\ s_y(t) = t^2 \text{ y } \ s_z(t) = t^2 - 4$$

Se considera el vector de posición $(s_x(t), s_y(t), s_z(t))$. Hallar los instantes en los que el módulo de dicho vector es máximo ó mínimo.

6.16 De entre todas las latas cilíndricas de espesor constante y volumen 100 cm^3, ¿Cual pesa menos?

6.17 Determinar el parámetro *a* para que las parábolas $y^2 = 2x$ e $y^2 = 3(x-a)$ se corten bajo un ángulo máximo.

6.18 Un taller tiene una capacidad de producción de 1000 piezas diarias, que se pueden vender a 300 pts/unidad. El precio de costo de x piezas viene dado por $P(x)=\dfrac{1800}{\sqrt[3]{x}}$. Determinar:

1) El número de piezas que producen un beneficio máximo.
2) El número de piezas que producen una pérdida máxima
3) El número de piezas que hay que fabricar para que no haya pérdidas.

6.19 Un taller fabrica piezas que se pueden vender a 2100 pts la unidad. El precio de costo medio de cada pieza es función del tiempo t (medido en minutos) que se lleva trabajando en cada jornada, de forma que el precio de costo es t^2. El número total de piezas fabricadas es, también, función del tiempo e igual a $\sqrt{t}$. Determinar el momento en que debe interrumpirse el trabajo para que el beneficio sea máximo.