5. APROXIMACIÓN DE FUNCIONES POR POLINOMIOS. POLINOMIO DE TAYLOR

ASPECTOS TEÓRICOS

5.1. POLINOMIO DE TAYLOR

5.1.1. PLANTEAMIENTO
5.1.2. DEFINICIÓN
5.1.3. FORMA DIFERENCIAL DEL DESARROLLO DE TAYLOR

5.2. DESARROLLOS DE MCLAURIN

5.3. OBSERVACIONES AL POLINOMIO DE TAYLOR. APLICACIONES

5.1. POLINOMIO DE TAYLOR.

5.1.1. PLANTEAMIENTO.

Consideremos una función $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ real de variable real definida en un entorno de un punto a. En el Capítulo 4 vimos que "Si f es derivable en a, entonces, la recta tangente es la recta que más se aproxima a la función en un entorno del punto a". Lo que nos permitía escribir

$$f(a+h)-f(a) \approx f'(a)h$$

o bien

$$f(x) \approx f(a)+f'(a)(x-a)$$

Tengamos en cuenta que:

- La recta tangente $y(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$, es un polinomio de grado 1 expresado en potencias de $(x-a)$.
- Existen $f(a)$ y $f'(a)$ y que además $y(a)=f(a);\ y'(a)=f'(a)$
- El orden de aproximación de la recta tangente a la función, en un entorno del punto **a**, es mayor que 1.

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera que admite derivadas continuas, hasta orden *n,* en un punto **a**, y $p(x)$ un polinomio de grado $\leq$ n.

Este polinomio siempre lo podremos expresar de la forma

$$p(x)=c_0+c_1(x-a)^1+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3+\cdots+c_n(x-a)^n$$

La cuestión ahora es*: ¿Podemos encontrar los coeficientes de dicho polinomio de forma que se cumpla*

$$p(a)=f(a);\ p'(a)=f'(a);\ p''(a)=f''(a);\ldots;p^{(n)}(a)=f^{(n)}(a)$$

y que además el orden de aproximación de dicho polinomio a la función en un entorno del punto a sea mayor que n?

⏩ Derivando sucesivamente el polinomio $p(x)$ se tiene

$$\begin{aligned}
p'(x) &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + ... + nc_n(x-a)^{n-1} \\
p''(x) &= 2.1c_2 + 3.2c_3(x-a) + ... + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2} \\
&\dots \\
p^{k)}(x) &= k(k-1)...2.1c_k + ... + n(n-1)(n-k+1)c_n(x-a)^{n-k} \\
&\dots \\
p^{n)}(x) &= n(n-1)(n-2)...2.1c_n
\end{aligned}$$

Y sustituyendo en el punto x=a

$$\begin{aligned}
p'(a) &= c_1 = f'(a) \\
p''(a) &= 2.1c_2 = f''(a) \\
&\dots \\
p^{k)}(a) &= k(k-1)...2.1c_k = f^{k)}(a) \\
&\dots \\
p^{n)}(a) &= n(n-1)(n-2)...2.1c_n = f^{n)}(a)
\end{aligned}$$

obtenemos que los coeficientes del polinomio vienen dados por:

$$c_0 = f(a)\,;\; c_1 = \frac{f'(a)}{1!};\, c_2 = \frac{f''(a)}{2!};\, c_3 = \frac{f'''(a)}{3!};......\, c_n = \frac{f^{(n}(a)}{n!}$$

y el polinomio p(x) será entonces:

$$p(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \quad ..... \quad + \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Entendiendo que $0! = 1$, también podemos escribir

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k}(a)}{k!}(x-a)^k$$ ⏪

5.1.2. DEFINICIÓN

Definición 5.1.- Al polinomio $p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k}(a)}{k!}(x-a)^k$ se le denomina ***polinomio de Taylor de grado n de la función f(x) en el punto a*** y lo designaremos por $P_n(f(x),a)$,$T_n(f(x),a)$ ó simplemente $P_{n,a}(x)$.

Teorema 5.1.- Sea $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función para la que existe $f^{n)}(a)$ y es continua. El orden de aproximación del polinomio de Taylor a f(x) en un entorno del punto a es superior a n, es decir $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-p(a+h)}{h^n} = 0$

⏩ **Demostración**.

Si escribimos el polinomio de Taylor como

$$p(a+h) = f(a) + f^{'}(a)h + \frac{f^{"}(a)}{2!} + \ldots\ldots$$

y además tenemos en cuenta que, el hecho de que existe $f^{n)}(a)$ y sea continua significa que existen $f(a), f'(a), f''(a), \ldots, f^{n-1)}(a)$ y $f^{n)}(a)$, y son todas continuas por tanto $\lim_{h\to 0} f^{k)}(a+h) - f^{k)}(a) = 0$ para , $0 \le k \le n$ se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h-\frac{f''(a)}{2!}h^2-\ldots\ldots-\frac{f^{(n}(a)}{n!}h^n}{h^n} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Aplicando a este límite el teorema de L'Hôpital, se tiene:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h)-f'(a)-\frac{f''(a)}{2!}2h-\ldots\ldots-\frac{f^{(n}(a)}{n!}nh^{n-1}}{nh^{n-1}} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Aplicando n-1 veces el teorema de L'Hôpital, se tiene que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h)-p(a+h)|}{h^n} = \lim_{h\to 0} \frac{|f^{(n}(a+h)-f^{(n}(a)|}{n!} = 0$$

Quedando así demostrado.⏪

Así pues, podemos asegurar que el polinomio p(x), que hemos construido a partir de f(x), se aproxima a esta función en el punto a y que el orden de aproximación es mayor que n**.** Así la diferencia entre la función y el polinomio de Taylor es un infinitésimo de orden mayor que n.

Definición 5.2.- A la función $R_n(x) = f(x) - T_n(f(x), a) \;\; p(x)$ se le denomina ***resto de Taylor de grado n de la función f(x) en el punto a*** y se cumple que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a) - T_n(f(x), a)}{(x-a)^n} = 0$. Es decir, el resto de Taylor es un infinitésimo de orden n en $x = a$

5.1.3. FORMA DIFERENCIAL DEL DESARROLLO DE TAYLOR.

Si en el desarrollo de Taylor:

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{'}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{''}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{'''}(a)}{3!}(x-a)^3 + \quad ..... \quad + \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,a}(x)$$

hacemos $\Delta x = (x - a) = dx$, teniendo en cuenta que $d^n f = f^{n)}(x) dx^n$ y por tanto $d^n fa = f^n(a)(x - a)^n$, podemos escribir el desarrollo de Taylor en la forma:

$$f(x) - f(a) = \frac{df_a}{1!} + \frac{d^2 f_a}{2!} + \frac{d^3 f_a}{3!} + \quad ..... \quad + \frac{d^n f_a}{n!} + R_{n,a}(x)$$

5.2. DESARROLLOS DE MCLAURIN.

Observemos que si efectuamos el desarrollo de Taylor de una función en el punto x=0 obtenemos:

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{'}(0)}{1!}x + \frac{f^{''}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{'''}(0)}{3!}x^3 + \quad ..... \quad + \frac{f^{(n}(0)}{n!}x^n + R_{n,0}(x)$$

A este desarrollo en el punto x=0 se le denomina ***Desarrollo de McLaurin.***

Teorema 5.2.- Las funciones reales de variable real que a continuación se mencionan admiten Desarrollos de McLaurin de cualquier orden en el punto, y vienen dados por:

1.- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n$

2.- $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n-1}$

3.- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}$

4.- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n$

5.- $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + R_5$

6.- $\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + R_{2n-1}$

7.- $(1+x)^r = 1 + \frac{r}{1!} x + \frac{r(r-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{r(r-1)...(r-n+1)}{n!} x^n + R_n$

5.3. OBSERVACIONES AL POLINOMIO DE TAYLOR. APLICACIONES.

Hemos de constar que ni la utilización de polinomios es la única forma de aproximar funciones, ni el polinomio de Taylor es el único mediante el cual se puede aproximar una función.

- VALORES APROXIMADOS.

Por lo visto anteriormente el orden de aproximación del Polinomio de Taylor a la función, en un entorno del punto **a**, es mayor que **n**. Es decir, si la función f(x) admite un número suficiente de derivadas en el punto **a** y, por tanto, podemos tomar **n** suficientemente grande, podremos hacer que la diferencia entre el valor de la función y el del Polinomio de Taylor sea tan pequeña como queramos, no solo en el un entorno del punto sino también fuera del punto. Como se puede observar en la Figura 5.1.

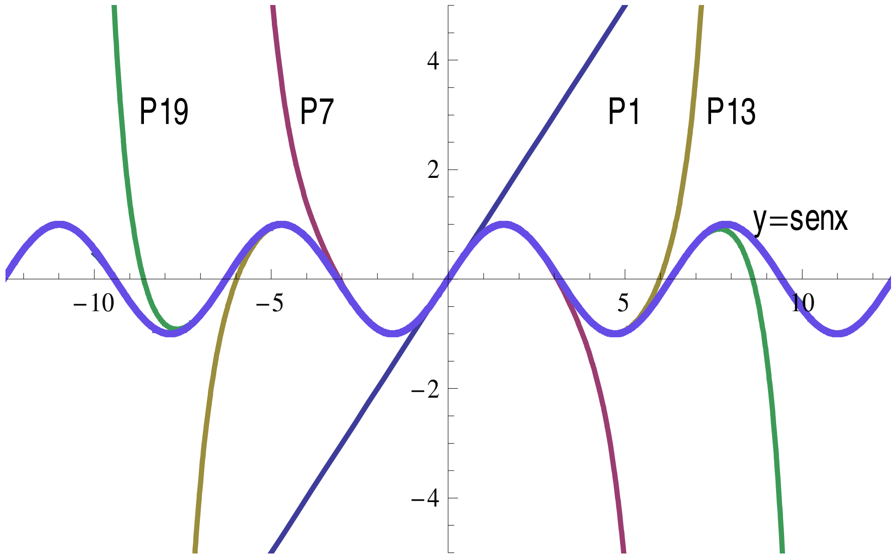

Figura 5.1. Aproximaciones por Polinomios de Taylor de la función $y = \text{sen}\, x$

Ejemplo 5.1.- *Calculemos sucesivas aproximaciones del número e*

El desarrollo de McLaurin de la función $y(x) = e^x$ viene dado por

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n$$

Para calcular las sucesivas aproximaciones del número **e** evaluamos dicho desarrollo en $x = 1$, obteniendo

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} + \cdots$$

El número **e** con 12 decimales exactos viene dado por

$$e \simeq 2.718281828459 .$$

A continuación presentamos las sucesivas aproximaciones del número **e** por polinomios hasta orden 10

$$p1 \approx 1 + \frac{1}{1!} = 2$$

$$p2 \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = 2.5$$

$$p3 \approx p2 + \frac{1}{3!} = 2.66666666667$$

$$p4 \approx p3 + \frac{1}{4!} = 2.70833333333$$

$$p5 \approx p4 + \frac{1}{5!} = 2.71666666667$$

$$p6 \approx p5 + \frac{1}{6!} = 2.71805555556$$

$$p7 \approx p6 + \frac{1}{7!} = 2.71825396825$$

$$p8 \approx p7 + \frac{1}{8!} = 2.71827876984$$

$$p9 \approx p8 + \frac{1}{9!} = 2.71828152557$$

$$p10 \approx p9 + \frac{1}{10!} = 2.71828180115$$

⏩ DESARROLLOS DE TAYLOR A PARTIR DE OTROS CONOCIDOS.

Queremos calcular el desarrollo de McLaurin de las funciones definidas por:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ y } \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Tengamos en cuenta que:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n$$

por tanto

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + R_n$$

Si restamos ambos desarrollos y dividimos por 2 queda:

$$\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n-1}$$

Si sumamos ambos desarrollos y dividimos por 2 queda:

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}$$

⏩ ORDEN Y PARTE PRINCIPAL DE UN INFINITÉSIMO.

Sea f una función que admite desarrollo de Taylor de orden n en el punto a y que además es infinitésimo en dicho punto, es decir $\lim_{x \to a} f(x) = 0 = f(a)$.

Supongamos que **n** es el orden de la primera derivada de f no nula en el punto **a.** Su desarrollo de Taylor en el punto a vendrá dado por:

$$f(x) = \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n$$

lo que indica que f(x) es un infinitésimo de orden n y que la parte principal es

$$\text{ppal} = \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

En efecto

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\left(\frac{f^{(n}(a)}{n!} + \frac{R_n}{(x-a)^n}\right) = \frac{f^{(n}(a)}{n!}$$

Lo que significa que

$$f(x) \approx \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$$

⏩ **Ejemplo 5.2.-** Para determinar el orden y la parte principal del infinitésimo $f(x) = x^3 e^{2x}$, utilizamos el desarrollo de la función $y(x) = e^x$ ya conocidos, obteniendo el desarrollo de $f(x)$ de esta forma

$$f(x) = x^3\left(1 + \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \ldots + \frac{(2x)^n}{n!} + R_n\right)$$
$$= x^3 + \frac{2x^4}{1!} + \frac{8x^5}{2!} + \ldots + \frac{2^n x^{n+3}}{n!} + x^3 R_n$$

por lo que $f(x)$ es un infinitésimo de orden 3 y su parte principal viene dada por $\text{ppal} = x^3$.