4. DERIVABILIDAD Y DIFERENCIABILIDAD DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

ASPECTOS TEÓRICOS

4.1. DERIVABILIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

4.1.1. EL PROBLEMA DE LA RECTA TANGENTE
4.1.2. DEFINICIÓN
4.1.3. ECUACIÓN DE LA TANGENTE Y LA NORMAL A LA CURVA EN UN PUNTO
4.1.4. VELOCIDAD, ACELERACIÓN Y OTRAS RAZONES DE CAMBIO

4.2. PROPIEDADES DE LA DERIVABILIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

4.2.1. CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD
4.2.2. PROPIEDADES ALGEBRAICAS
4.2.3. DERIVACIÓN FUNCIONES COMPUESTAS. REGLA DE LA CADENA

4.3. FUNCIÓN DERIVADA

4.3.1. DERIVADAS SUCESIVAS
4.3.2. DERIVADA DE LA FUNCIÓN INVERSA
4.3.3. FUNCIÓN DERIVADA DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

4.4. DIFERENCIABILIDAD DE UNA FUNCION REAL DE UNA VARIABLE REAL

4.5. MÉTODOS PARA EL CÁLCULO DE RAÍCES REALES DE UNA ECUACIÓN

4.1. DERIVABILIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

4.1.1. EL PROBLEMA DE LA RECTA TANGENTE.

Nos planteamos el problema de determinar la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en un punto $P = (a, f(a))$, entendiendo por ello una *tangente local* a la curva en un punto concreto, sin importarnos si la recta y la curva se cortan ó no en cualquier otro punto.

El problema de hallar la recta tangente en un punto se reduce al de hallar su ***pendiente.*** Para ello, consideramos un punto $P = (a, f(a))$ y un punto próximo a él $Q = (a+h, f(a+h))$ y trazamos la secante que une ambos puntos. Cuando Q tiende hacia P, la recta secante tiende a confundirse con la tangente, y por tanto, la pendiente de la recta secante será cada vez más parecida a la de la recta tangente en P. Como se observa en la Figura 4.1.

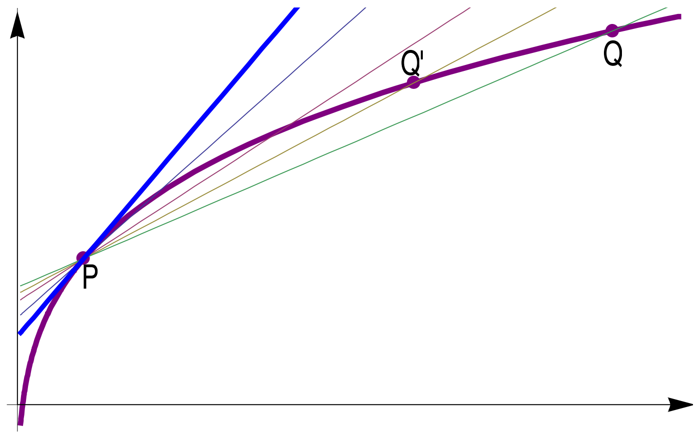

Figura 4.1. La recta tangente como límite de las rectas secantes

Según la Figura 4.2, la pendiente de la recta secante que pasa por P y Q es el cociente de incrementos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

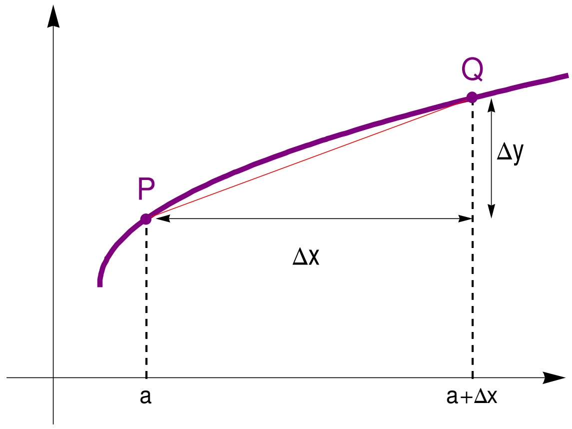

Figura 4.2. Representación gráfica de una recta secante

Si aproximamos la pendiente de la recta tangente por el valor de las pendientes de las rectas secantes, esta será

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

4.1.2. DEFINICIÓN.

Definición 4.1.- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, se dice que **f es derivable en a** si y sólo si existe y es finito el límite $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Al valor del límite se le denomina derivada de f en a y se denota por $f'(a)$.

Definición 4.2.- Otra manera de caracterizar la derivada en un punto es en términos de los límites laterales. Existe $f'(a)$ si y sólo si existen y son iguales los límites laterales:

$$f'(a^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(a^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

que se denominan derivada por la derecha y por la izquierda de f en el punto a, respectivamente.

Hay que tener en cuenta que si estos dos límites, aún existiendo, no son iguales en a, entonces la función no es derivable en dicho punto.

Conclusión 4.1.- La derivada de una función y=f(x) en un punto es la **pendiente de la recta tangente a la curva** y=f(x) en el punto $P=(a, f(a))$.

4.1.3. ECUACIÓN DE LA TANGENTE Y LA NORMAL A LA CURVA EN UN PUNTO.

La ecuación de una recta que pasa por el punto $P(x_0, y_0)$ y que tiene por pendiente m viene dada por $y-y_0=m(x-x_0)$.

La pendiente de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto $P(x_0, y_0)$, donde $y_0=f(x_0)$, vendrá dada por $f'(x_0)$ y, por tanto, la ***recta tang***ente en ese punto será:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

La ***recta normal*** es la perpendicular a la recta tangente en el punto. Cuando dos rectas son perpendiculares sus pendientes cumplen la relación $m_1=-\frac{1}{m_2}$. Por tanto, la ecuación de la normal a la curva $y=f(x)$ en el punto $P(x_0, y_0)$ será:

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

4.1.4. VELOCIDAD, ACELERACIÓN Y OTRAS RAZONES DE CAMBIO.

En multitud de problemas prácticos se presenta la necesidad de calcular la razón de cambio de una magnitud respecto de otra; esta cuestión se plantea en el estudio de crecimiento de poblaciones, ritmos de producción, flujos de agua, velocidad y aceleración, por citar algunos de los ejemplos.

Ejemplo 4.1.- (Movimiento Rectilíneo)

Supongamos que una partícula se mueve a lo largo de una recta. Sea s=s(t) la función que nos da la posición de la partícula respecto a un origen predeterminado en cada instante de tiempo. El movimiento de la partícula hacia la derecha se considera en dirección positiva y el movimiento hacia la izquierda se considera en dirección negativa.

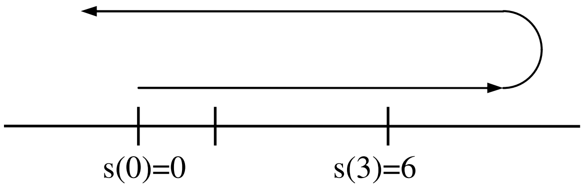

Figura 4.3. Representación gráfica de un movimiento rectilíneo

Durante un intervalo de tiempo Δt la distancia recorrida por la partícula viene dada por $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$. Recordando la fórmula $\text{velocidad}=\dfrac{\text{espacio}}{\text{tiempo}}$

decimos que la velocidad media del objeto en el intervalo Δt está dada por;

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t};$$

donde *la velocidad media* (razón media de cambio) expresa el *coeficiente de variación* de s respecto a t en un intervalo de tiempo.

La razón de cambio de s respecto de t en un instante determinado se denomina *velocidad instantánea* de la partícula (o, simplemente, velocidad); que resulta ser el límite de la velocidad media cuando $\Delta t \to 0$, es decir:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t)$$

y esto no es sino la definición de la derivada de la función espacio respecto del tiempo en el instante t. La velocidad es un número que en valor absoluto nos da la rapidez con la que varía el espacio; el signo de dicho número indica la dirección en la que se mueva la partícula.

De la misma forma que hemos hecho anteriormente podemos definir la aceleración como la razón de cambio de la velocidad respecto del tiempo y será

$$a(t)=v'(t)\,.$$

⏩ **Ejemplo 4.2.-** Se lanza una piedra desde una altura de 756 m. que cae hacia el suelo en línea recta. En t segundos la piedra recorre una distancia de $s(t)=21t^2$ metros.

El tiempo transcurrido hasta que la piedra llega al suelo será el valor de t tal que

$$s(t)=21t^2=756\Rightarrow t^2=36\Rightarrow t=6$$

La velocidad media de la partícula en el momento que está cayendo viene dada por

$$v_m=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\frac{756}{6}=126$$

La velocidad media de la partícula durante los tres primeros segundos viene dada por

$$v_m=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\frac{s(3)-s(0)}{3}=\frac{189}{3}=63$$

La velocidad de la partícula y la aceleración vienen dadas por

$$\begin{cases} v(t)=s'(t)=42t \\ a(t)=v'(t)=s''(t)=42 \end{cases}$$

por tanto la velocidad y la aceleración de la partícula cuando llega al suelo serán

$$\begin{cases} v(6)=252m/s \\ a(6)=42m/s^2 \end{cases}$$

Velocidad y aceleración son tan sólo dos ejemplos de razones de cambio, pero hay muchas más situaciones en las que podemos usar la derivada para medir la razón de cambio de una variable respecto de otra siempre y cuando estas variables estén ligadas por una función derivable.

4.2. PROPIEDADES DE LA DERIVABILIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

4.2.1. CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD.

⏩ **Ejemplo 4.3.-** Consideremos la función definida por $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x>0 \\ -x^2-1 & \text{si} \quad x\le 0 \end{cases}$

Esta función no es continua en $x=0$ porque no existe el límite en ese punto ya que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \ne \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 1$.

Veamos si puede ser derivable

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x} = 0$$
$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2-1-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2-2}{x} = \infty$$

La función no puede ser derivable en $x=0$, porque no es continua en ese punto, De hecho, si observamos la Figura 4.4, vemos que las secantes por la derecha se hacen horizontales mientras que, por la izquierda, la pendientes de las secantes se hacen infinito como consecuencia de la discontinuidad.

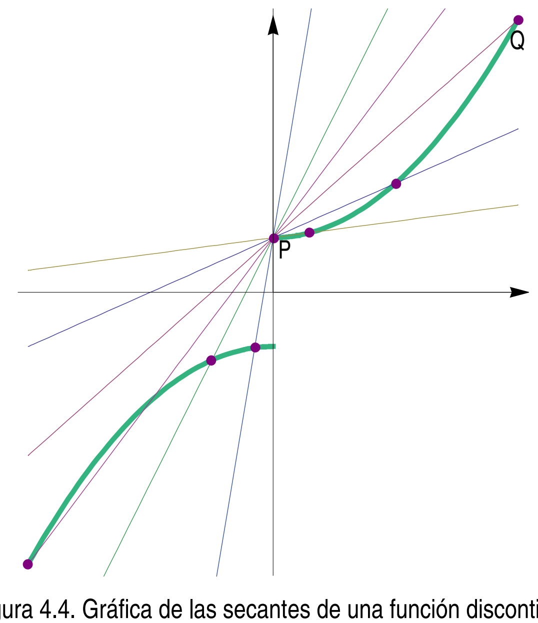

Figura 4.4. Gráfica de las secantes de una función discontinua

Ejemplo 4.4.- Consideremos la función $f(x)=|x|$. Esta función es continua en $x=0$, pero no es derivable en este punto ya que

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-1\neq f'(0^+)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1.$$

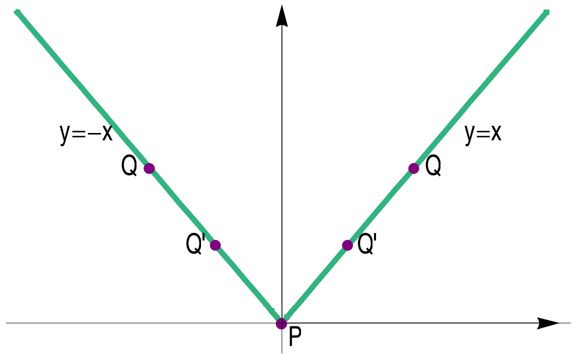

Figura 4.5. Gráfica de las secantes de $f(x)=|x|$

Como se puede observar en la Figura 4.5, las secantes por la izquierda tienen todas pendiente -1 por lo que, la recta tangente debería tener pendiente -1. Sin embargo, por la derecha las secantes tienen pendiente 1 y, por tanto, la tangente tendría que ser 1. Como este valor debería ser único la función no es derivable en ese punto.

Conclusión 4.2.- Una función que no es continua en un punto no puede ser derivable en dicho punto. Además, el recíproco no tiene por que ser cierto, es decir, una función continua en un punto no tiene porqué ser derivable en ese punto.

La relación entre continuidad y derivabilidad en un punto viene dada por el siguiente resultado.

Teorema 4.1.- Si f es derivable en $x=a$, entonces f es continua en $x=a$

Demostración.-

La función $f(x)$ es continua en x=a $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)]=0$.

Multiplicando y dividiendo por (x-a) se tiene que:

$$\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)]=\lim_{x\to a}(x-a)\frac{[f(x)-f(a)]}{x-a}=\lim_{x\to a}(x-a)\cdot\lim_{x\to a}\frac{[f(x)-f(a)]}{x-a}=0$$

puesto que f es derivable en a y, por tanto, el último de estos límites existe y es finito, se tiene que

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)-f(a)\right]=0 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

de donde se deduce que f es continua en x=a, como queríamos demostrar.

4.2.2. PROPIEDADES ALGEBRAICAS.

Teorema 4.2.- Si f y g son derivables en un punto x=a. Entonces:

i) $(c*f)'(a)=c*f'(a)$, donde c es una constante.

ii) $(f \pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$

iii) $(f*g)'(a)=f'(a)*g(a)+f(a)*g'(a)$

iv) $(f/g)'(a)=\dfrac{f'(a)*g(a)-f(a)*g'(a)}{\left[g(a)\right]^2};\ g(a)\neq 0$

4.2.3. DERIVACIÓN FUNCIONES COMPUESTAS. REGLA DE LA CADENA.

Teorema 4.2.- Si $x=g(t)$ es una función derivable en $t=a$ e $y=f(x)$ es una función derivable en $x=g(a)$ entonces la función $y(t)=(f\circ g)(t)=f(g(t))$ es una función derivable en $t=a$ y su derivada viene dada por:

$y'(a)=(f\circ g)'(t)=f'(g(a))*g'(a)$

- **Ejemplo 4.5.-** Para calcular la derivada de la función $u=\cos x^3$ definimos

$$y(u)=f(u)=\cos u \Rightarrow y'(u)=f'(u)=-\operatorname{sen} u$$
$$u(x)=g(x)=x^3 \Rightarrow u'(x)=g'(x)=3x^2$$

Aplicando la regla de la cadena se tiene que

$$y'(x)=\left[y(u(x))\right]'=y'(u(x))*u'(x)=-\operatorname{sen} u\cdot 3x^2=-3x^2\operatorname{sen} x^3$$

- **Ejemplo 4.6**.- Una piedra se deja caer sobre un estanque en reposo y produce ondas circulares concéntricas. El radio r de la onda exterior crece a ritmo constante a razón de 30cm/s. Cuando su radio es 120 cm. ¿A qué ritmo crece el área total A de la zona perturbada?

Las variables A y r están ligadas por la ecuación del círculo $A(r)=\pi\, r^2$. Al ser r variable entonces el área en función del tiempo viene dada por

$$A(t)=A\big(r(t)\big)=\pi\, r(t)^2 .$$

Nos piden es calcular $A'(t)$ cuando $r=120$. Como r crece a razón de 30cm/s, es decir $r'(t)=30$, aplicando la regla de la cadena

$$A'(t)=A'\big(r(t)\big)r'(t)=2\pi r(t)r'(t)$$
$$A'(t)\big|_{r=120}=2\pi*120*30=7200\pi \text{ cm}^2/\text{seg} .$$

⏩ **Ejemplo 4.7.-** Se bombea aire en un globo esférico a razón de 4,5 cm3/min. Hallar la razón de cambio del radio cuando r=2 cm.

El volumen V del globo y el radio r están relacionadas por la ecuación $V(r)=\frac{4}{8}\pi\, r^3$. Puesto que V crece a razón de 4,5 cm^3/min. Se tiene que $V'(t)=4,5$ y nos piden calcular $r'(t)$ cuando r=2. Aplicando la regla de la cadena se tiene que:

$$V'(t)=4\pi\, r^2*r'(t)\Rightarrow r'(t)=\frac{1}{4\pi r^2}*V'(t)\Big|_{r=2}\quad=\frac{1}{16\pi}*\frac{9}{2}\approx 0,09 \text{ cm/min} .$$

Además

$$V'(t)=4,5 \quad\Rightarrow\quad V(t)=4,5t=\frac{4}{3}\pi r^3 \quad\Rightarrow\quad r=\sqrt[3]{\frac{27}{8\pi}}=\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$$

En la Tabla 4.1, se observa que el volumen crece a ritmo constante pero el crecimiento del radio es inversamente proporcional al tiempo y en el instante t=9 es cuando menos crece.

t	1	3	5	7	9
v	4,5	13,5	22,5	31,5	40,5
R	1,02	1,48	1,75	1,96	2,13
$r'(t)$	0,34	0,16	0,12	0,09	0,08

Tabla 4.1. Tabla de variación del radio en función del tiempo

4.3. FUNCIÓN DERIVADA.

4.3.1. DERIVADAS SUCESIVAS.

Definición 4.3.- Si una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en todo punto $x \in A' \subset A$ se dice que f es derivable en A' y se llama ***función derivada*** de f a la aplicación $f' : A' \to \mathbb{R}$ que hace corresponder a cada valor de x, la derivada de f en ese punto $f'(x)$, que es única.

Si f es derivable en A' y su función derivada f' es, a su vez, derivable $\forall x \in A'' \subset A'$, se dirá que f es dos veces derivable en x y se ***llama derivada segunda de f en x*** a $\left(f'\right)'(x) = f''(x)$. A la aplicación $f'' : A'' \to IR$, que hace corresponder a cada valor de x , la derivada segunda de f en ese punto $f''(x)$, que es única, se denomina ***función derivada segunda de f.***

En general, si existe la función derivada de f de orden (n-1) y $f^{(n-1)}$ es nuevamente derivable en x, se dirá que f es n veces derivable en x y que su ***derivada n-ésima*** ó ***derivada de orden n*** es $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x)$.

Para hallar la derivada n-ésima de una función dada se realizan derivadas sucesivas. La expresión del término general se demuestra aplicando el ***Principio de Inducción Matemática.***

⏩ **Ejemplo 4.8.-** Sea $y = e^{kx}$ donde k es una constante. Se tiene que:

$$y' = ke^{kx}\,;\ y'' = k^2e^{kx}\,;\ y''' = k^3e^{kx}$$

de donde suponemos que $y^{(n)} = k^n e^{kx}$. Puesto que esta fórmula es cierta para n=1 y suponiendo que es cierta para un natural n cualquiera, para (n+1) también es cierta puesto que:

$$y^{(n+1)}(x) = (y^{(n)})'(x) = (k^n e^{kx})' = k^n k\, e^{kx} = k^{n+1}e^{kx}$$

Entonces, por el Principio de Inducción Matemática podemos afirmar que la propiedad

$$y^{(n)} = k^n e^{kx}$$

se cumple para cualquier $n \geq 1$.

Ejemplo 4.9.- Para $y = \operatorname{sen} x$ se tiene que:

$$y' = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right);\ y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

de donde suponemos que $y^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$. Puesto que esta fórmula es cierta para n=1 y suponiendo que es cierta para un n cualquiera, para (n+1) será cierta puesto que $y^{(n+1)} = \left[\operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$, por el Principio de Inducción Matemática afirmamos que $y^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ se cumple para cualquier $n \geq 1$.

4.3.2. DERIVADA DE LA FUNCIÓN INVERSA.

***Teorema 4.4*.-** Si la función inyectiva $f : A \subset IR \to B \subset IR$ es derivable en $y = f(x)$ entonces su función inversa $(f)^{-1} : B \subset IR \to A \subset IR$, es derivable en $x = f^{-1}(y)$ y además $f'(x) = \dfrac{1}{(f^{-1})'(y)}$

Demostración.-

Al ser inyectiva existirá su función inversa. Puesto que:

$$(f^{-1} o f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$

es una función derivable aplicando la regla de la cadena se obtiene que:

$$(f^{-1} o f)'(x) = (f^{-1})'(f(x))f'(x) = (f^{-1})'(y)f'(x) = 1$$

verificándose que $f'(x)=\dfrac{1}{(f^{-1})'(y)} \Leftrightarrow y'(x)=\dfrac{1}{x'(y)}$. ◂◂

▸▸ **Ejemplo 4.10.-** Puesto que $y=\operatorname{arcsen} x$ si y sólo si $x=\operatorname{sen} y$. Entonces:

$$x'(y)=\cos y=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}=\sqrt{1-x^2}\ ,$$

puesto que $y'(x)=\dfrac{1}{x'(y)}$ se tiene que $\left(\operatorname{arcsen} x\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4.3.3. FUNCIÓN DERIVADA DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES.

Para calcular la función derivada de cualquier función nos bastaría con conocer las reglas de derivación relativas a la suma, composición, etc., y las derivadas de las funciones elementales.

Las siguientes funciones son derivables en todo su dominio y además sus funciones derivadas vienen dadas por:

FUNCIÓN	FUNCIÓN DERIVADA
$y(x)=\ln_a x$; $a>0; a\neq 1$	$y(x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$
$y(x)=\ln x;\quad x>0$	$\dfrac{1}{x}; \forall x>0$
$y(x)=x^n$; $n\neq 0$; Si $n<0 \Rightarrow x\neq 0$	$y(x)'=x^{n-1}; n\in\mathbb{R}$
$y(x)=c^x, c>0$.	$\left(c^x\right)'=c^x Lnc \Rightarrow \left(e^x\right)'=e^x$
$y(x)=f(x)^{g(x)}$	$y'(x)=g(x)f(x)^{g(x)-1}+f(x)^{g(x)}Lnf(x)g'(x)$
$y(x)=\cos x$	$y'(x)=-\operatorname{sen} x;$
$y'(x)=\operatorname{sen} x$	$y'(x)=\cos x$
$y(x)=\operatorname{arcsen} x$	$y'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y(x)=\arccos x$	$y'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y(x)=\operatorname{tg} x$	$y'(x)=1/\cos^2 x=1+\operatorname{tg}^2 x$
$y(x)=\operatorname{arctg} x$	$y'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$
$y(x)=\operatorname{Sh} x$	$y'(x)=\operatorname{Ch} x$
$y(x)=\operatorname{Ch} x$	$y'(x)=\operatorname{Sh} x$
$y(x)=\operatorname{Th} x$	$y'(x)=1/\operatorname{Ch}^2 x=1-\operatorname{Th}^2 x$
$y(x)=\operatorname{ArgSh} x$	$y'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$y(x)=\operatorname{ArgCh} x$	$y'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$y(x)=\operatorname{ArgTh} x$	$y'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$

Tabla 4.2. Derivadas de las funciones elementales

4.4. DIFERENCIABILIDAD DE UNA FUNCION REAL DE UNA VARIABLE REAL.

4.4.1. EL PROBLEMA DE LA APROXIMACIÓN.

Sea $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y $a \in A$. Se trata de encontrar una función $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que se parezca lo más posible a f en un entorno del punto a y tal que $f(a) = g(a)$. Como se representa en la Figura 4.6, para medir la aproximación de g a f, mediremos el orden del infinitésimo $\Delta f(a;\Delta x) - \Delta g(a;\Delta x)$, donde $\Delta f(a;\Delta x) = f(a+\Delta x) - f(a)$.

Definición 4.4.- El ***orden de aproximación de g a f*** en un entorno del punto a es mayor que r si y sólo si el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{|\Delta f(a;\Delta x) - \Delta g(a;\Delta x)|}{|\Delta x|^r} = \lim_{x\to 0} \frac{|f(a+\Delta x) - g(a+\Delta x)|}{|\Delta x|^r} = 0$$

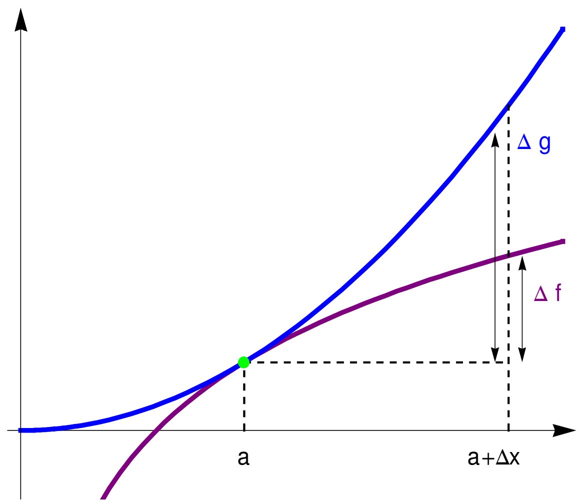

Figura 4.6. Aproximación de una función en un punto

4.4.2. LA RECTA TANGENTE COMO MEJOR APROXIMACIÓN.

Nos planteamos ahora el problema de determinar la recta $y(x) = mx + n$, de forma que el orden de aproximación de la recta a la función sea máximo. Para $y(x)$ se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} y(x_0) = mx_0 + n \\ y(x_0 + \Delta x) = mx_0 + n + m\Delta x \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta y(x_0;\Delta x) = m\Delta x$$

- El orden de aproximación será mayor que cero si:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)-m\Delta x}{(\Delta x)^0} = \lim_{\Delta x\to 0} f(a+\Delta x)-f(a)-m\Delta x = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0} f(a+\Delta x)-f(a) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Esto será cierto, siempre y cuando la función sea continua en x=a.

- El orden de aproximación será n>1 si:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)-m\Delta x}{\Delta x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = m$$

Esto será cierto, siempre y cuando la función sea derivable en x=a y además $f'(a) = m$.

- Como además $f(a)=g(a)$, entonces $f(a) = ma+n \Rightarrow n = f(a)-ma$. Por lo que la ecuación de la recta será

$$y = mx + f(a) - ma \Leftrightarrow y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

que es la ecuación de la recta tangente a f(x) en x=a.

Conclusión 4.3.- Si f es derivable en a, entonces, la recta tangente es la recta que más se aproxima a la función en un entorno del punto a y además:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)-m\Delta x}{\Delta x} = 0$$

siendo $m = f'(a)$. El recíproco también es cierto.

Definición 4.5.- Se dice que una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es ***diferenciable en a*** si y sólo si existe un número real m tal que:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)-m\Delta x}{\Delta x} = 0$$

De lo visto en anteriormente se deduce el siguiente resultado.

Teorema 4.5.- Una función es derivable en un punto x=a si y sólo si es diferenciable en dicho punto. Además $m = f'(a)$.

4.4.3. DIFERENCIABILIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. INTERPRETACIÓN.

Definiendo

$$\varepsilon(\Delta x) = \frac{f(a+\Delta x) - f(a) - f'(a)\Delta x}{\Delta x}$$

deducimos que

$$f(a+\Delta x) - f(a) = f'(a)\Delta x + \Delta x \varepsilon(\Delta x) \text{; con } \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0.$$

Puesto que $\varepsilon(\Delta x)$ es un infinitésimo cuando $\Delta x \to 0$, se tiene que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{f'(a)\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(a)\Delta x + \Delta x \varepsilon(\Delta x)}{f'(a)\Delta x} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varepsilon(\Delta x)\,\Delta x}{f'(a)\Delta x} = 1 + 0 = 1$$

que es tanto como decir que $f(a+\Delta x) - f(a)$ y $f'(a)\Delta x$ son infinitésimos equivalentes, lo que significa que

$$\boxed{f(a+\Delta x) - f(a) \approx f'(a)\Delta x}$$

Definición 4.6.- Se denomina ***diferencial de f en el punto a***, a la expresión de variable Δx para cada valor de ***a*** dada por

$$df_a(\Delta x) = f'(a)\Delta x$$

Cuando $\Delta x \to 0$, el incremento de la función y su diferencial toman valores aproximadamente iguales, lo que nos permite escribir:

$$\Delta f(a;\Delta x) \simeq df_a(\Delta x)$$

4.4.4. LA DERIVADA COMO COEFICIENTE DE VARIACIÓN.

El concepto de diferenciabilidad de una función en punto nos permite afirmar que, en ese punto, el incremento de la función y su diferencial toman valores aproximadamente iguales, lo que nos permite escribir

$$f(a+\Delta x)-f(a)\approx f'(a)\Delta x:$$

Es decir "cuando el punto **a** varía Δx, entonces lo que varía la función es, aproximadamente el producto de una constante ***m*** por lo que varía la **a** que es Δx".

En definitiva $m=f'(a)$, que es la derivada de f en el punto a, y que representa la razón de cambio de la función en un punto, se comporta como un coeficiente de transmisión de errores, ya que la función no varia sólo según lo que varíe el punto si no también en función del tamaño de la derivada. Veamos el siguiente ejemplo.

⏩ **Ejemplo 4.11.-** El volumen de una esfera $V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$ se calcula para un valor del radio procedente de una medición. Si en una esfera de radio *r* el error de medición en el radio fuese Δr entonces, el volumen sufriría un incremento, aproximado, que vendría dado por el valor de la diferencial y sería

$$\Delta V\approx dV=V'(r)dr=4\pi r^2\Delta r$$

El incremento de volumen no sólo depende del incremento del radio sino también del tamaño de la derivada para ese valor del radio. Puesto que $V'(r)=4\pi r^2$, cuanto mayor sea el valor del radio, mayor será el incremento del volumen con el mismo incremento de radio

En una esfera de 50 cm. de radio que se obtiene con un posible error de ±2cm., el posible error en el cálculo del volumen de la esfera será

$\Delta V\approx dV=V'(50)(\pm 2)=\pm 20000\pi$ cm^3

En una esfera de 10 cm. de radio se obtiene con un posible error de ±2cm.

El incremento de volumen vendría dado por

$\Delta V\approx V'(10)(\pm 2)=\pm 800\pi$ cm^3

Una derivada grande transmite el error de la variable a la imagen amplificando su valor.

4.4.5. DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN.

Si en la expresión

$$df_a(\Delta x) = f'(a)\Delta x,$$

sustituimos ***a*** por un punto cualquiera x, tendremos la expresión

$$df = f'(x)\Delta x$$

en la que aparecen dos variables x e Δx, que es la diferencial de f en cualquier punto ***x***, que se denomina simplemente diferencial de f.

Si consideramos la función $y = x$ tenemos que $dy = dx = \Delta x$, de donde ***diferencial de f*** viene dada por

$$df = f'(x)dx$$

Esta expresión que permite aproximar todas las posibles variaciones de la función f cuando un punto cualquiera x varía Δx.

⏩ **Ejemplo 4.12.**- Para estimar de forma aproximada el valor de $\sqrt{27}$.

Utilizamos la diferencial de la función $f(x) = \sqrt{x}$ con Δx =2; $x_0 + \Delta x = 27$ y $x_0 = 25$. Puesto que

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx df_{x_0}(\Delta x) = f'(x_0).\Delta x$$

Entonces:

$$df_{x_0}(\Delta x) = f'(x_0).\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}2 = 0{,}2 \Rightarrow \sqrt{27} - \sqrt{25} \approx 0{,}2 \Rightarrow \sqrt{27} \approx 5{,}2$$

4.4.6. NOTACION d/dx.

Si consideramos la función $y = f(x)$ tenemos que:

$$dy = f'(x)dx \Leftrightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Esta expresión de la derivada como la razón de la diferencial de la función respecto de la diferencial de la variable independiente, se conoce como notación de Leibniz.

De este modo el cálculo de la diferencial se reduce al cálculo de la derivada, ya que, al multiplicar esta última por la diferencial de la variable independiente se obtiene la diferencial.

Definimos la ***diferencial segunda*** de f como $d^2 f = f''(x)dx^2 \Leftrightarrow \frac{d^2 f}{dx^n}$.
Análogamente, la ***diferencial de orden n*** de f se define como $d^n f = f^{(n)}(x)dx^n$

⏩ **Ejemplo 4.13.**

1.- $y = \operatorname{tg}^2 x \rightarrow dy = 2\operatorname{tg} x \frac{1}{\cos^2 x} dx$

2.- $y = \sqrt{1 + Ln\, x} \rightarrow dy = \frac{1}{2\sqrt{1 + Ln\, x}} \cdot \frac{1}{x} dx$

Propiedades de la diferencial.- Las reglas de derivación se cumplen también para las diferenciales:

a) Si $y(x) = \text{cte} \Rightarrow dy = 0$

b) Si $y(x) = u(x) \pm v(x) \Rightarrow dy = du \pm dv$

c) Si $y(x) = u(x)v(x) \Rightarrow dy = du \cdot v + u \cdot dv$

d) Si $y(x) = u(x) / v(x) \Rightarrow dy = (du \cdot v - u \cdot dv) / v^2$.

e) Si $y(x) = u(v(x)) \Rightarrow dy = u'(v) \cdot dv = u'(v(x))v'(x)dx = (u \circ v)'(x)dx$

⏩ **Ejemplo 4.14.-** Calcular $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ para la función y(x) que satisface la ecuación:

$$\operatorname{sen}(x+y) + xy^2 = 2\,.$$

Aplicando las propiedades de las diferenciales mencionadas anteriormente, se tiene:

$$d\left(\operatorname{sen}(x+y) + xy^2\right) = d(2) \Leftrightarrow d\left(\operatorname{sen}(x+y)\right) + d\left(xy^2\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos(x+y)d(x+y) + dx.y^2 + xd(y^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos(x+y)(dx+dy) + dx.y^2 + x2ydy = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos(x+y)+y^2}{\cos(x+y)+2xy}$$

⏩ **Ejemplo 4.15.-** Calcular $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ para la función y(x) que satisface la ecuación:

$$\sqrt{x^2+y^2} + \operatorname{tg} xy^2 = 0\,.$$

Aplicando las propiedades de las diferenciales mencionadas anteriormente, se tiene:

$$d\left(\sqrt{x^2+y^2} + \operatorname{tg} xy^2 = 0\right) = d(0) \Leftrightarrow d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + d\left(\operatorname{tg} xy^2\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}d(x^2+y^2) + \left(1+\operatorname{tg}^2 xy^2\right)d\left(xy^2\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2xdx+2ydy}{2\sqrt{x^2+y^2}} + \left(1+\operatorname{tg}^2 xy^2\right)\left(dx.y^2 + xd(y^2)\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x\cos^2(x^2y) + 2xy\sqrt{x^2+y^2}}{y\cos^2(x^2y) + x^2\sqrt{x^2+y^2}}$$

4.5. MÉTODOS PARA EL CÁLCULO DE RAÍCES REALES DE UNA ECUACIÓN.

4.5.1. MÉTODO ITERATIVO DEL PUNTO FIJO,

Los métodos iterativos de tipo punto fijo consisten en transformar la ecuación f(x)=0, en una ecuación de la forma x=g(x). De forma que buscar una raíz para la ecuación f(x)=0 se traduce en buscar lo que se denomina un punto fijo de la función g(x), es decir, un valor α para el que se verifica g(α)=α.

RESULTADOS PREVIOS.

Definición 4.7.- Una función $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, es ***contractiva*** si existe un número real K tal que 0≤K<1 verificando

$$\left|g(x)-g(y)\right|<K\left|x-y\right|,\ \forall x,y\in[a,b]$$

Teorema 4.6.- Sea $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, tal que verifica las siguientes condiciones

a) g derivable en x, $\forall x\in\left[a,b\right]$

b) g contractiva en el intervalo $\left[a,b\right]$

En estas condiciones podemos afirmar que existe un único punto fijo de la función g(x). Además, si $x_0\in\left[a,b\right]$, la sucesión $\{x_n\}$, así construida

$$\begin{gathered}x_1=g(x_0)\\ \ldots\\ x_{n+1}=g(x_n)\end{gathered}$$

converge al valor α.

El siguiente resultado garantiza que la función g(x) es contractiva.

Teorema 4.7.- Sea $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivable tal que $g'(x)<1,\ \forall x\in(a,b)$. Entonces, g es contractiva en el intervalo $\left[a,b\right]$.

DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO.

- **Localización de la raíz.**

Buscar un intervalo $[a,b]$ tal que se verifique $f(a)*f(b)<0$.

- **Solución aproximada.**

Partiendo de un punto si $x_0 \in [a,b]$, construimos la sucesión $\{x_n\}$

$$x_1=g(x_0)$$
$$\ldots$$
$$x_{n+1}=g(x_n)$$

- **Estimación del error.**

El error relativo aproximado lo mediremos mediante la expresión

$$e_n=\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+1}}\right|$$

Pararemos cuando el error sea menor que un valor predeterminado.

- **Convergencia del método.**

Queda garantizada siempre que la función sea contractiva en el intervalo $[a,b]$, es decir, cuando se cumplan las condiciones del Teorema 4.6 ó 4.7.

4.5.2. MÉTODO NEWTON-RAPHSON

DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

Es uno de los métodos más eficaces para la obtención un valor aproximado de la raíz de una ecuación y consiste en utilizar como valor aproximado x_1 de la raíz de la ecuación f(x)=0, el valor de la raíz de la recta tangente a f(x) en un punto x_0. La recta tangente a f(x) en x_0 viene dada por la ecuación

$$y(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

x_1 es el valor para el que se verifica

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0$$

- **Primera aproximación de la raíz.**

Partiendo de un punto x_0, cogemos como primera aproximación el valor x_1 tal que

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

- **Mejora de la solución.**

Repetimos el paso anterior con x_1 y obtenemos como 2ª aproximación

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

De esta forma obtenemos una sucesión de puntos $\{x_n\}$ dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- **Estimación del error.**

El error relativo aproximado lo mediremos mediante la expresión

$$e_n = \left|\frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+1}}\right|$$

Pararemos cuando el error sea menor que un valor predeterminado.

- **Convergencia del método.**

Teorema 4.8.- Sea $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$, tal que verifica las siguientes condiciones

a) $f(a)*f(b)<0$

b) $f'(x)\neq 0, \forall\ x\in[a,b]$

c) $f''(x)<0 (\text{ó } f''(x)>0),\ \forall x\in\ [a,b]$

Partiendo de un punto $x_0 \in [a,b]$, la sucesión $\{x_n\}$ converge a c tal que f(c)=0.