4.5. PRÁCTICAS PROPUESTAS.

4.1 Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

1) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{si } \ x \neq 0 \\ 0 & \text{si } \ x = 0 \end{cases}$$

2) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - b\,\text{sen}\, x}{x^2} & \text{si } \ x \neq 0 \\ 0 & \text{si } \ x = 0 \end{cases}$$

3) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^3 - x}{\text{sen}\, x} & \text{si } \ x \neq 0 \\ 0 & \text{si } \ x = 0 \end{cases}$$

Si alguna de las funciones es derivable en x=0, calcular en ese punto la segunda derivada.

4.2 Calcular las funciones f ‘(x) , f ″(x) y f ‘’’(x) de la función $f(x) = |x|^3$

4.3 Demostrar que la función $y(x) = \text{sen}\, 5x\, e^{2x}$ satisface la ecuación $y'' - 4y' + 29y = 0$.

4.4 Demostrar que la función $y(x) = x^3 \,\text{Ln}\, x$ satisface

$$y^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{6(n-4)!}{x^{n-3}} \quad \text{para } n \geq 4 .$$

4.5 Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a la curva $f(x) = \dfrac{(3-x^2)\sqrt{(5-x)}}{(x+1)}$ en el punto $x = 0$.

4.6 Hallar el valor de a para el cual la parábola y=a x^2 es tangente a la curva $y(x) = \text{Ln}\, x$.

4.7 ¿Que relación debe existir entre a, b y c para que la parábola $y = ax^2 + bx + c$ sea tangente al eje OX?

4.8 Hallar el punto de la parábola $y = x^2 - 7x + 3$ en el que la tangente es paralela a la recta $5x - y - 3 = 0$.

4.9 Dada la curva definida por la ecuación $3x^2 + 2y^2 - 2x - 3y - 3 = 0$ hallar la ecuación de la recta tangente a la misma en el punto (1,2)

4.10 Comprobar que las familias de hipérbolas $x^2 - y^2 = a$ y $x\,y = b$ forman una red ortogonal.

4.11 Determinar el valor de b para que las curvas $y = x^2 - 1$ e $y = 3x^2 - b$ se corten bajo un ángulo de 45º y de 90º.

4.12 Una piedra se deja caer sobre un estanque en reposo y produce ondas circulares concéntricas. El radio r de la onda exterior crece a ritmo constante a razón de 30cm/s. Cuando su radio es 120 cm ¿a qué ritmo crece el área total A de la zona perturbada?

4.13 Se bombea aire en un globo esférico a razón de 4,5 cm^3/min. Hallar la razón de cambio del radio cuando r=2 cm.

4.14 Un depósito cilíndrico de material elástico se deforma con el peso del contenido que recibe de forma que el radio crece a razón de 2cm/min. y la altura disminuye a razón de 1cm/min. Hallar la velocidad de cambio del volumen cuando han transcurrido 15 minutos, sabiendo que el depósito tenía inicialmente una altura de 30cm y un radio de 10 cm.

4.15 Un punto (0,y) se mueve por el eje OY con velocidad R m/s mientras que el punto (x,0) se mueve por el eje OX con velocidad r m/s. Hallar una expresión para la razón de cambio de la distancia de ambos respecto del tiempo.

4.16 Un controlador aéreo sitúa dos aviones en la misma altitud convergiendo en su vuelo hacia un mismo punto en ángulo recto. Uno de ellos se encuentra a 150 millas/hora, el otro está a 250 millas y vuela a 600 millas/hora:

a) ¿A qué ritmo decrece la distancia entre los dos aviones transcurridos 10 minutos?

b) ¿De cuánto tiempo dispone el controlador para situarlos en trayectorias distintas?

4.17 Se arroja arena en un montón cónico a razón de 2 m^3/min. Hallar la razón de cambio de la altura del montón cuando h=1,5 m sabiento que h=r.

4.18 La velocidad con que una sustancia se transforma en otra es proporcional a la cantidad que queda sin transformar. Sabiendo que la cantidad de sustancia inicialmente presente es de 50 unidades y que en el instante t=3 es de 25 unidades, hallar el tiempo transcurrido hasta que la cantidad de sustancia que quede sin transformar sea 1/10 de la cantidad inicial

4.19 Una escalera de 7 m. de longitud está apoyada en una casa. Si la base de la escalera se separa de la pared a razón de 0,5 m/s

a) ¿A qué velocidad baja el extremo superior transcurridos: 4 segundos, 8 segundos,12 segundos?

b) ¿Cuál es la distancia a la pared en cada uno de esos momentos?

4.20 Usando diferenciales, calcular de forma aproximada las siguientes cantidades:

a) $(3.02)^4$ b) $\sqrt{3.98}$ c) $\sqrt[3]{8.09}$

d) cos 31º e) sen 59º f) $e^{0.98}$

4.21 Usar dy para aproximar Δy cuando x varía según se indica

a) $y = \sqrt{3x-2}$ si x=2 e Δx=03

b) $y = x\sqrt{8x+1}$ si x=3 e Δx=0.05

c) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ si x=2 e Δx=-0.03

4.22 Se fabrican esferas metálicas que deben tener un radio de 50 mm. Por falta de prcisión de las máquinas todas las esferas no tienen el mismo radio. Se consideran defectuosas si el volumen excede (por exceso o por defecto) en un 3% del volumen especificado.

a) Estimar, usando la diferencial, el porcentaje de error máximo en el radio para que las esferas no sean consideradas defectuosas.

b) Estimar el aumento de volumen que sufririá una esfera de radio 100 mm si se cometiese un error del 2% en la medición del radio.

4.23 El coste en Euros de reducir un *p* por ciento la polución generada por una central térmica que quema carbón viene dada por la función $C(p)$ tal que $C'(p) = \dfrac{8000000}{(100-p)^2}$ $0 \le p < 100$. La normativa europea exige la eliminación de al menos el 60% de la polución generada con una multa de 2000 euros por cada 1% de polución que no se elimine.

1) Determinar la diferencial de $C(p)$

2) El responsable económico de la empresa decide eliminar solo el 50% de la polución generada. Estimar, usando la diferencial anterior, si resulta rentable económicamente para la empresa cumplir la normativa.

4.24 Dada la ecuación no lineal $\frac{1}{\cos x} = 2\sqrt[3]{x}$

a) Comprobar la convergencia del método del Punto Fijo

b) En caso afirmativo calcular la raíz con un error inferior al 27%

c) Aplicar el método de Newton-Rapshon para calcular la raíz con un error inferior al 27%

Aplicar ambos utilizando como punto de partida el punto $x_0 = 0.1$.

4.25 Dada la ecuación no lineal $\sqrt{x} - \ln x = 0$

a) Comprobar la convergencia del método del Punto Fijo

b) En caso afirmativo calcular la raíz con un error inferior al 50% utilizando como punto de partida el punto $x_0 = 1.9$

c) Aplicar el método de Newton-Rapshon para calcular la raíz con un error inferior al 70% y utilizando como punto de partida el punto $x_0 = 1$.

4.26 Dada la ecuación no lineal $e^x \dfrac{1}{\cos x} = 2$

a) Aplicar los métodos de Newton-Rapshon y del Punto Fijo para calcular la raíz de la ecuación. Aplicar dos iteraciones con cada uno de ellos utilizando como punto de partida el punto $x_0 = 0.4$.

b) Calcular el error relativo en cada casoy comparar los datos obtenidos.

4.27 Dada la ecuación no lineal $e^{-2x} - 2\operatorname{sen} x \cos x = 0$

a) Comprobar la convergencia del método del Punto Fijo.

b) Aplicar los métodos de Newton-Rapshon y del Punto Fijo para calcular la raíz de la ecuación. Aplicar dos iteraciones utilizando como punto de partida el punto $x_0 = 0.2$, calculando el error relativo en cada una de ellas.

4.28 Calcular una solución de la ecuación no lineal $x - 0.8 - 0.2\operatorname{sen} x = 0$ con un error relativo inferior a 0.0002, aplicando el método del Punto Fijo y utilizando como punto de partida el punto $x_0 = 0$.

4.29 Dada la ecuación no lineal $x^2 e^x = 1 + \operatorname{sen} x$

a) Aplicar el método de Newton-Rapshon para calcular la raíz con un error relativo inferior al 2% y utilizando como punto de partida el punto $x_0 = 0.77$.

b) Con etos mismos datos, comprobar si se puede aplicar el método del Punto Fijo.