3.3. PRÁCTICAS PROPUESTAS.

3.1 Estudiar la continuidad de las siguientes funciones. Si alguna de las funciones no es continua en un punto, decir si es posible redefinirla en ese punto para que sea continua

1) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+3}{5} & \text{si } x \le 1\\ 6-5x & \text{si } 1<x<3\\ x-3 & \text{si } x\ge 3\end{cases}$$

2) $$f(x)=\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$$

3) $$f(x)=5x\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2x}$$

4) $$f(x)=\begin{cases}x^2+\dfrac{|x|}{x} & \text{si } x\ne 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

5) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}\left((1+x)^n-1-nx\right) & \text{si } x\ne 0\\ \dfrac{1}{2}n(n-1) & \text{si } x=0;\ n\ge 2\end{cases}$$

6) $$f(x)=\begin{cases}x\left|1+\dfrac{1}{x}\right| & \text{si } x\ne 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

3.2 Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-x}{\mathrm{sen}\pi x};\ x\in(0,1)$. Definir f(0) y f(1) para que f sea continua en todo el intervalo cerrado $[0,1]$.

3.3 Estudiar, según el valor de los parámetros, la continuidad de las siguientes funciones:

1) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\le 1 \\ 3-ax^2 & \text{si } x>1 \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} -3\operatorname{sen}x & \text{si } x\le -\pi/2 \\ A\operatorname{sen}x+B & \text{si } -\pi/2<x<\pi/2 \\ \cos x & \text{si } x\ge -\pi/2 \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} 2\cos x & \text{si } x<0 \\ (ax+b)^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$

3.4 Un ejemplo de función escalón es la función ***parte entera***. Se define la parte entera del número real x por $E[x]=$ al mayor entero n t.q. $n\le x$. Dibujar la función y estudiar la continuidad en el punto x=0.

3.5 El número de unidades en el almacén de una empresa pequeña es:

$$N(t)=25\left(2E\left[\frac{t+2}{2}\right]-t\right)$$

3.6 donde t representa el tiempo medido en meses. Dibujar la gráfica de la función y discutir la continuidad. ¿Cada cuanto tiempo debe reponer su mercancía esa tienda?.

3.7 Estudiar si la función $f(x)=2+\operatorname{tg}(x^2-3x+2)$ es continua $\forall x\in R$.

3.8 Se considera la función $y(x)=\operatorname{Ln}\dfrac{3x+4}{1+x}$. Determinar su dominio natural de definición, precisando los puntos de discontinuidad y la clase de discontinuidad que presenta.

3.9 ¿Puede tomar la función $f(x)=\frac{x^3}{4}-\operatorname{sen}\pi x+3$ el valor 7/3 en el intervalo $[-2,2]$?

3.10 Ver que la función $f(x)=\begin{cases} 2^x+1 & \text{si } -1\le x<0 \\ 2^x & \text{si } x=0 \\ 2^x-1 & \text{si } 0<x\le 1 \end{cases}$ definida y acotada en $[-1,1]$ no tiene valor máximo ni mínimo. ¿Contradice esto el teorema de Weierstrass?

3.11 Demostrar que la ecuación $x^5-3x=1$ posee al menos una raíz real comprendida entre el 1 y el 2. Calcularla con un error inferior a er=0.01.

3.12 Demostrar que la ecuación $x^4+2x^3-1=0$ posee al menos dos raíces reales. Calcularla una de ellas con un error inferior a er=0.001.

3.13 Demostrar que la ecuación $x^{3422}+\frac{524}{17+3x^2+\cos^2 x}=420$ posee al menos una raíz real. Calcularla con un error inferior a er=0.01.

3.14 ¿Tiene alguna raíz real la ecuación $\operatorname{sen}x-x+1=0$? En caso afirmativo, calcularla con un error inferior a er=0.01.

3.15 Demostrar que la ecuación $2x^3-3x^2+7x-10=0$ posee una raíz en el intervalo $[1,2]$. Aproximarla con dos decimales exactos.

3.16 Utilizar el Teorema de Bolzano para demostrar que si f y g son funciones continuas en $[a,b]$ y tales que

3.17 $$f(a)<g(a) \text{ y } f(b)>g(b)$$

3.18 entonces $\exists x_0 \in (a,b)$ t.q. $f(x_0)=g(x_0)$. (Nota: aplicar el Teorema de Bolzano a la función $h(x)=f(x)-g(x)$)

3.19 A las 8:00 A.M. del sábado un hombre comienza a ascender por una montaña hasta su campamento. El domingo a las 8:00 A.M. desciende de regreso. Sube en 20 minutos y desciende en 10. Demostrar que pasó por algún punto exactamente a la misma hora. (Si s(t) y r(t) son las trayectorias de subida y bajada respectivamente, aplicar el ejercicio anterior).