3. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

ASPECTOS TEÓRICOS

3.1. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

3.1.1. DEFINICIÓN
3.1.2. EJEMPLOS
3.1.3. PROPIEDADES

3.2. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO

3.2.1. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS EN UN INTERVALO CERRADO
3.2.2. MÉTODO DE BISECCIÓN PARA EL CÁLCULO DE RAÍCES REALES DE UNA ECUACIÓN

3.1. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

3.1.1. DEFINICIÓN.

Por lo visto en el tema anterior, dada una función real de variable real cualquiera; no se cumple, necesariamente, que en un punto dado la función tenga límite (Caso A) ó que teniendo límite en ese punto la función no esté definida (Caso B) ó que teniendo límite en un punto y estando definida en ese punto el valor del límite y el de la función en dicho punto no coincidan (Caso C), como se puede observar en la Figura 3.1.

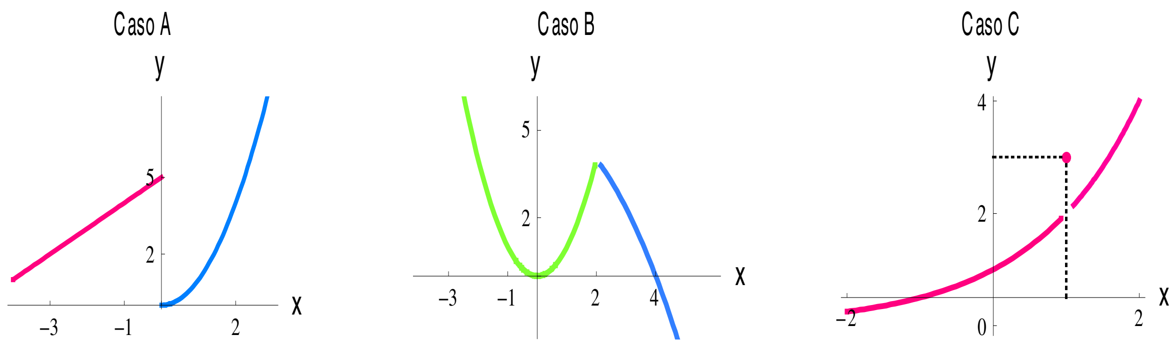

Figura 3.1. Comportamiento de una función en un punto

Las funciones que no presentan ninguna de estas tres anomalías se dice que son continuas.

Definición 3.1.- Sea $f: D \subset IR \to IR; \quad a \in IR$. Decimos que la función ***f es continua en a*** si y sólo si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

En definitiva, una función es continua si su gráfica no contiene interrupciones, ni saltos ni oscilaciones indefinidas, como la de la función descrita en la Figura 3.2

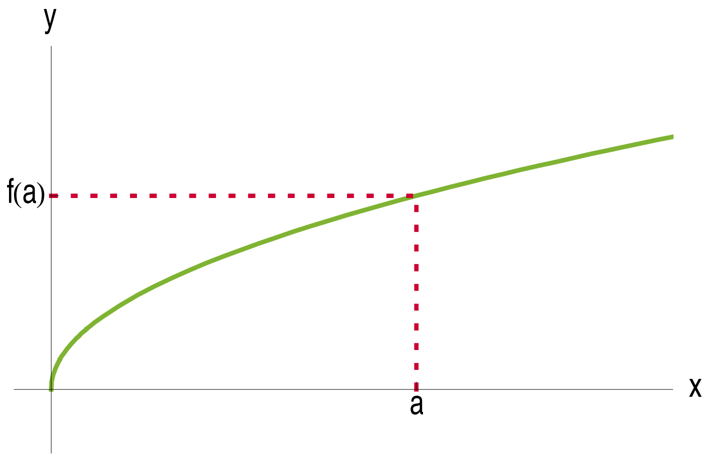

Figura 3.2. Gráfica de una función continua en un punto

De la Definición 3.1 deducimos que para que f sea continua en ***a,*** deben cumplirse las siguientes condiciones:

a) f(a); es decir, ***a*** está en el dominio de f.

b) $\exists \lim_{x \to a} f(x) = l$

c) $l = f(a)$.

Por la propiedad relativa a los límites laterales, la condición b) puede sustituirse por la condición:

b)´ Existen $\lim_{x \to a^+} f(x) = l_d; \lim_{x \to a^-} f(x) = l_i$ y además $l_d = l_i = l$

3.1.2. EJEMPLOS.

Es fácil encontrar ejemplos de funciones que sean, o no, continuas. De hecho, todo ejemplo referente a límite suministra un ejemplo de continuidad.

⏩ **Ejemplo 3.1.-** La función f(x)=$|x|$ es continua en x=0, puesto que se cumple

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = \lim_{x \to 0^-} (-x) = f(0) = 0.$$

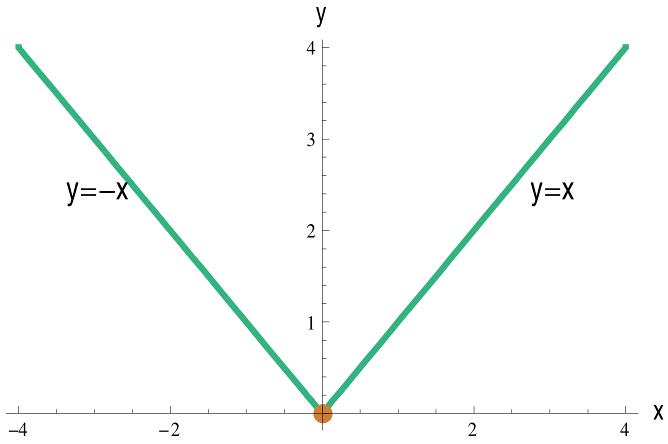

Figura 3.3. Comportamiento de la función f(x)=$|x|$ en x=0

Ejemplo 3.2.- La función definida por $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si x} > 0\\ -1 & \text{si x} \leq 0\end{cases}$ no tiene límite en x=0 y por tanto no es continua en x=0.

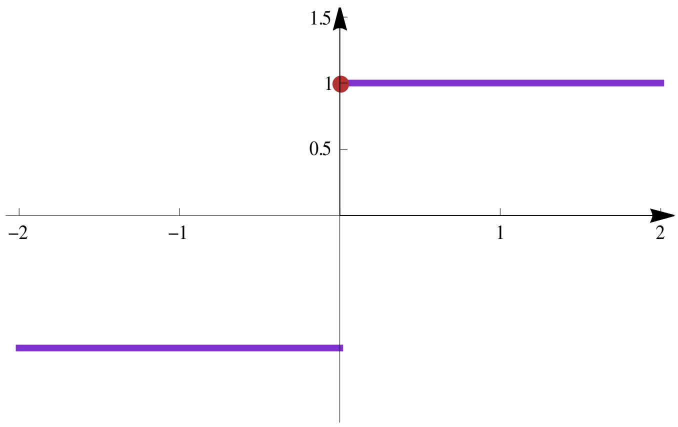

Figura 3.4. Gráfica de una función con discontinuidad inevitable

Ejemplo 3.3.- La función definida por $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{si x} \neq 0\\ 1 & \text{si x} = 0\end{cases}$ no es continua en x=0 ya que $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2/2}{x^2}=\dfrac{1}{2}\neq 1=g(0)$.

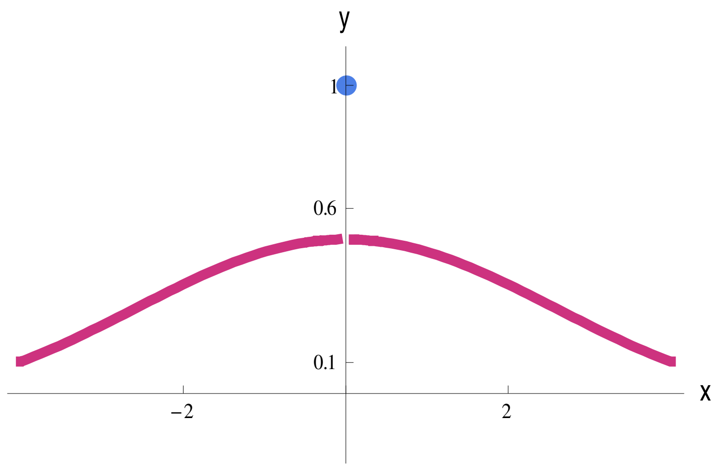

Figura 3.5. Gráfica de una función discontiuidad evitable

En este caso, se podría redefinir la función en x=0 de forma que fuese continua; es decir, a partir de g(x) se puede construir una función G(x) que coincida con g(x) en todos los puntos, excepto en x=0, y sin embargo G(x) si es continua en x=0. La función G(x) vendría dada por:

$$G(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{si } x \neq 0\\ \tfrac{1}{2} & \text{si } x = 0\end{cases}$$

3.1.3. PROPIEDADES.

***Teorema 3.1.-* (Propiedades algebraicas).**

Si $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ y $\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$, entonces:

a) $\lim_{x\to a} f(x)\pm g(x)=f(a)\pm g(a)\Rightarrow (f\pm g)(x)$ es continua en x=a.

b) $\lim_{x\to a} f(x).g(x)=f(a).g(a)\Rightarrow (f.g)(x)$ es continua en x=a.

c) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(a)}{g(a)}$ si $g(a)\neq 0\Rightarrow \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ es continua en x=a.

Esta propiedad significa que siempre que f y g sean continuas también lo serán la función suma y producto. Pero si una de ellas no es continua, la función suma o producto no tienen por qué serlo; aunque en algún caso lo sean.

Teorema 3.2.- Para la composición de funciones se satisface:
Si f continua en a y g(x) continua en f(a) entonces $(g \circ f)(x)$ es continua en a. En este caso se cumple $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = \lim\limits_{x \to a} (g(f(x)) = (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(\lim\limits_{x \to a} f(x))$.

A efectos prácticos esta propiedad permite intercambiar el límite con una función continua.

⏩ **Ejemplo 3.4-** Como la función $\operatorname{sen} x$ es continua en todos los puntos donde está definida, aplicando la propiedad anterior se tiene que:

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{x+\pi}{x-2} = \operatorname{sen} \lim_{x \to 0} \frac{x+\pi}{x-2} = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

Teorema 3.3.- *Sea* $f : D \subset IR \to IR$ tal que f es continua en a.
a) Si f(a)>0, entonces $\exists \delta > 0$ tal que $f(x) > 0 \ \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$.
b) Si f(a)<0, entonces $\exists \delta > 0$ tal que $f(x) < 0 \ \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$.

Este resultado es consecuencia de la propia definición de límite. Por ser f continua en a, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l = f(a) > 0$; puesto que l es positivo habrá un entorno de dicho punto en el que todos los puntos son positivos, y para ese entorno habrá un entorno del punto a (de radio δ) tal que las imágenes de todos esos puntos estarán en el entorno de l dado, y serán, por tanto, positivas.

3.2. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO.

El concepto de continuidad empieza a ser interesante cuando esta propiedad se verifica en todos los puntos de un intervalo.

Definición 3.2.-

1) *Se dice que f* ***es continua en el intervalo abierto*** (a,b), si f es continua en x, $\forall x \in (a,b)$.

2) Una función es ***continua en el intervalo cerrado*** $[a,b]$ si:

a) f continua en x, $\forall x \in (a,b)$,

b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \ \text{ y } \ \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$

La continuidad en los extremos del intervalo es menos restrictiva, basta conque haya continuidad a derecha e izquierda, respectivamente.

3.2.1. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS EN UN INTERVALO CERRADO.

Las propiedades más interesantes de la continuidad de una función en un intervalo cerrado se recogen en los tres teoremas siguientes de los cuales no daremos su demostración pero sí sus consecuencias.

Teorema 3.4.- ***(Teorema de Bolzano)***

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ *tal que:*

a) *f continua en* $[a,b]$,

b) $f(a)*f(b)<0 \Leftrightarrow f(a)<0<f(b) \ \text{ ó } \ f(a)>0>f(b)$

Entonces: $\exists x_0 \in (a,b) \ \text{ t.q. } \ f(x_0)=0$

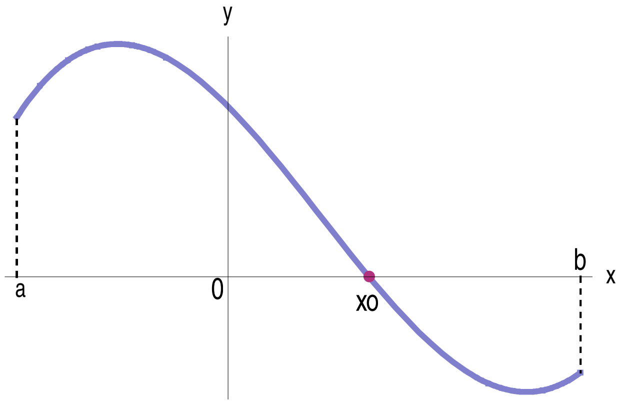

Figura 3.6. Representación gráfica del Teorema de Bolzano

Ejemplo 3.5.- La función definida por $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } -1\le x\le 0\\ 1 & \text{si } \ 0<x\le 1\end{cases}$ no se anula en el intervalo $[-1,1]$ a pesar de que en los extremos de dicho intervalo los valores que toma la función son de signo contrario. Esto no contradice el Teorema de Bolzano porque la función no es continua en dicho intervalo, ya que no es continua en x=0.

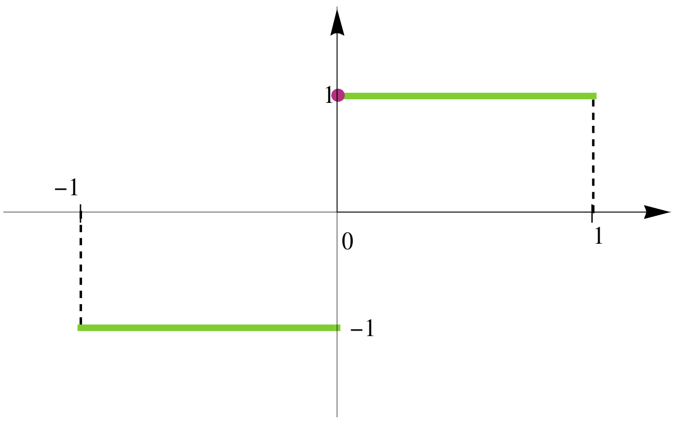

Figura 3.7.La función representada no cumple el Teorema de Bolzano

Teorema 3.5.- ***(Propiedad de Darboux*** *ó Teorema de los valores intermedios****).***

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ tal que:

a) f continua en $[a,b]$,

b) f(a)<c<f(b) ó f(a)>c>f(b).

Entonces: $\exists x_0\in(a,b)$ t.q. $f(x_0)=c$

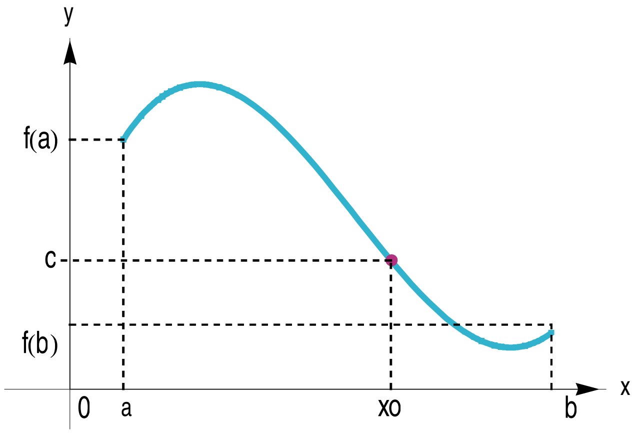

Figura 3.8. Representación gráfica del Teorema de los valores intermedios

Este teorema expresa que una función continua en un intervalo cerrado toma, al menos una vez, todos los valores comprendidos entre f(a) y f(b).

- **Ejemplo 3.6.-** Si una persona sube del segundo al octavo piso, aplicando este teorema, podemos afirmar que ha tenido que pasar por todos los pisos intermedios al menos una vez aunque, mientras tanto, haya podido subir al tercero y bajar al primero, para subir, posteriormente al octavo.

Definición 3.3.- Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ y el conjunto de sus imágenes definido por $B=\{f(x)\in\mathbb{R}\,/\,x\in[a,b]\}$

a) Si B admite cota superior, es decir $\exists M\in\mathbb{R}$ t.q. $f(x)\le M\ \forall x\in[a,b]$, se dice que la función está ***acotada superiormente*** en el intervalo $[a,b]$.

b) Si B admite cota inferior (existe $\exists N\in\mathbb{R}$ t.q. $N\le f(x)\ \forall x\in[a,b]$ se dice que la función está ***acotada inferiormente*** en el intervalo $[a,b]$.

Teorema 3.6.- ***(Teorema de Weierstrass*** *o de existencia de cota superior e inferior).*
Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua en todo el intervalo $[a,b]$ entonces la función está acotada superior e inferiormente en dicho intervalo.

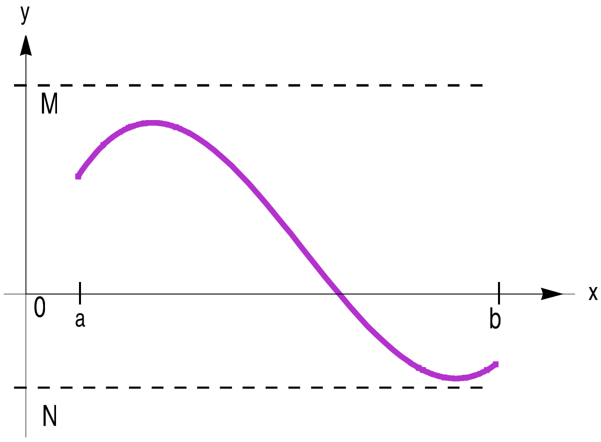

Figura 3.9. Representación grafica del Teorema de Weierstrass.

Definición 3.4.- Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ y el conjunto de sus imágenes definido por $B = \{f(x) \in \mathbb{R} \,/\, x \in [a,b]\}$

a) En el caso en que $M \in B$ la función alcanza el valor máximo, además $\exists\, y \in [a,b]$ t.q. $f(y) = M$ al que se denomina ***punto de máximo***.

b) En el caso en que $N \in B$ la función alcanza el valor mínimo, además $\exists\, z \in [a,b]$ t.q. $f(z) = N$ al que se denomina ***punto de mínimo***.

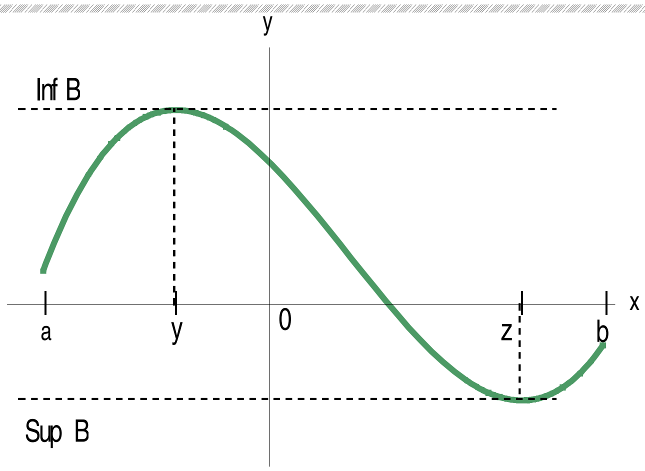

Figura 3.10. En la gráfica, la función alcanza el valor máximo y mínimo

Ejemplo 3.7.- La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $x \in [-1,1]$, no está acotada superior ni inferiormente en este intervalo. Esto no contradice el Teorema 3.6 por que la función no es continua en todos los puntos de dicho intervalo. En x=0, a pesar de no existir la función tampoco existe el límite.

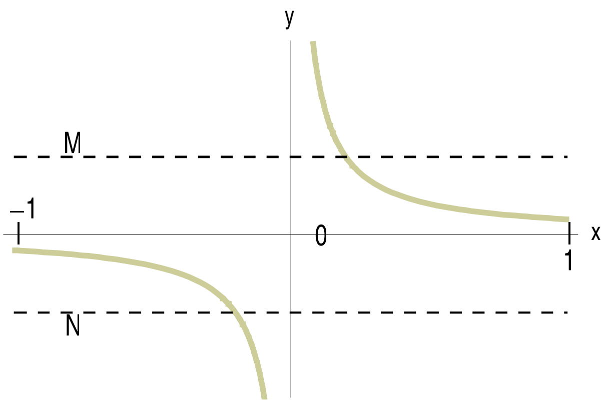

Figura 3.11. Representación gráfica de una función que no está acotada

La cuestión, ahora, es saber cuando una función está acotada y cuando alcanza el máximo y el mínimo. El siguiente teorema garantiza que las funciones que son continuas en un intervalo cerrado, no sólo están acotadas superior e inferiormente sino que además alcanzan el valor máximo y el mínimo.

***<u>Teorema 3.7.-</u>* (Teorema de existencia de punto máximo y mínimo)**.

Sea $f:[a,b] \to IR$ tal que f continua en $[a,b]$ entonces, la función alcanza el valor máximo y el valor mínimo en el intervalo $[a,b]$.

▸▸ **Ejemplo 3.8.-** La función definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$, alcanza el valor mínimo en x=0 y en x=1, pero no tiene máximo por que no hay ningún punto donde la función tome el valor 1. Esto se debe a que la función no es continua en x=1 puesto que $\exists \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 \ne f(1) = 0$. Sin embargo, a pesar de no ser continua esta función sí está acotada superior (por M=1) e inferiormente (por N=0).

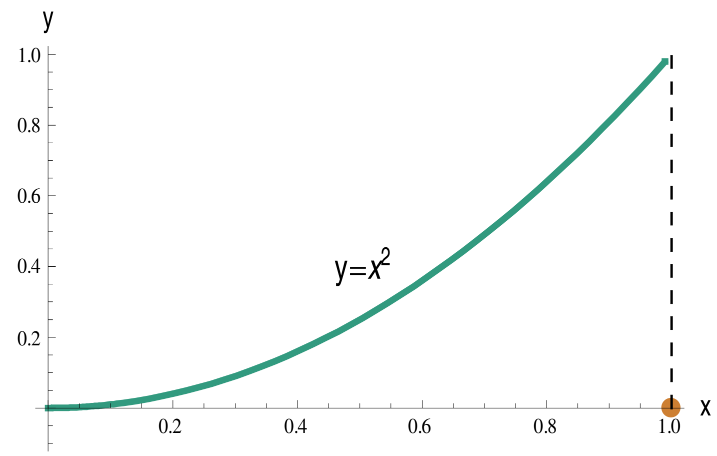

Figura 3.12. La función de la gráfica no alcanza el valor máximo

3.2.2. MÉTODO DE BISECCIÓN PARA EL CÁLCULO DE RAÍCES REALES DE UNA ECUACIÓN.

El Teorema de Bolzano permite calcular de forma aproximada las raíces reales de una ecuación f(x)=0

1º- Localización de la raíz.

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ tal que f continua en $[a,b]$ y $f(a)*f(b)<0$, por el Teorema de Bolzano, podemos afirmar que $\exists x_0 \in (a,b)$ t.q. $f(x_0)=0$.

2º- Solución aproximada y error.

Para calcular un valor aproximado de este valor, definimos *h=b-a* y la aproximación er que deseamos alcanzar. Procedemos de la siguiente forma:

1º) Un valor aproximado de dicha raíz será: $x_0 \approx x_{01} = \dfrac{a+b}{2}$ y el error cometido en esta aproximación será $e_1 < \dfrac{h}{2} = \dfrac{b-a}{2}$. Si $e_1 < er$ paramos en caso contrario mejoramos la solución.

3-Mejora de la solución. 2ª Aproximación.

2º) Si queremos mejorar la aproximación calculamos $f(x_{01})$. Si $f(x_{01}) \neq 0$ (en caso contrario x_{01} sería la raíz buscada), tomamos como nuevo intervalo $[a_1, b_1]$ y como nueva aproximación $x_0 \approx x_{02} = \frac{a_1 + b_1}{2}$ siendo

$$[a_1, b_1] = \begin{cases} [a, x_{01}] & \text{si } \operatorname{sgn} f(x_{01}).f(a) < 0 \\ [x_{01}, b] & \text{si } \operatorname{sgn} f(x_{01}).f(a) > 0 \end{cases} \text{ y } e_2 < \frac{h}{2^2}.$$

3º) Repetir el paso 2º) hasta que $e_n < er$ sea menor que una cantidad prefijada. El número p, de iteraciones necesarias para que $e_n < \frac{h}{2^n}$, vendrá dado por:

$$e_n = \frac{h}{2^n} < 10^{-p} \Rightarrow h10^p < 2^n \Rightarrow p \ln 10h < n \ln 2 \Rightarrow n > p\frac{\ln 10h}{\ln 2}$$

el mayor entero que cumple esta condición será

$$\text{Iteraciones}[n] = \text{ParteEntera}\left[n * \frac{\ln 10}{\ln 2}\right] + 1$$

La convergencia queda garantizada porque la diferencia el error tiende a cero; dicho de otra forma la sucesión de intervalos es una sucesión de intervalos encajados cuya amplitud tiende a cero.

⏩ **Ejemplo 3.9.-** Consideremos la función $f(x) = x^3 - 2$; con a=1 y b=2.

- Puesto que f(a)=-1 y f(b)=2; es decir que f(a).f(b)<0; f(x) se anula en un punto entre 1 y 2.
- Sea h=b-a=1; un valor aproximado de dicha raíz será: $x_0 \approx x_{01} = \frac{a+b}{2} = \frac{3}{2}$ y el error cometido en esta aproximación será $e_1 < \frac{h}{2} = \frac{1}{2}$.

- Si queremos mejorar la aproximación calculamos f(x_{01})=1.375. Como $f(x_{01}) \neq 0$ y $f(x_{01}).f(a) < 0$ tomamos como nuevo intervalo $[a_1, b_1]$=$[1,3/2]$ y como nueva aproximación $x_0 \approx x_{02} = \frac{a_1 + b_1}{2}$=1.25 siendo $e_2 < \frac{1}{2^2}$.
- Para un error inferior a 10^{-6} serán necesarias 20 iteraciones
- Si queremos mejorar la aproximación calculamos f(x_{02})=-0.047. Como $f(x_{02}) \neq 0$ y $f(x_{02}).f(b_1) < 0$ tomamos como nuevo intervalo $[a_2, b_2]$=$[1.25,1.5]$ y como nueva aproximación $x_0 \approx x_{03} = \frac{a_2 + b_2}{2}$=1.375 siendo $e_3 < \frac{1}{2^3}$.