2.4. PRÁCTICAS PROPUESTAS.

2.1 Teniendo en cuenta las equivalencias

$$(1+x)^n \approx 1+nx \text{ cuando } x \to 0 \text{ y } \mathrm{Ln}(1+x) \approx x \text{ cuando } x \to 0$$

calcular un valor aproximado de $0{,}97^4$ y Ln(1,08).

2.2 Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \mathrm{Ln}\dfrac{3x+4}{1+x}$

a) Comprobar que $f(x)$ es un infinitésimo en el punto $x_0 = \frac{3}{2}$. Hallar el orden infinitesimal de $f(x)$ cuando $x \to x_0$.

b) Utilizar el apartado anterior para obtener un valor aproximado de ln(1,02).

2.3 Determinar el orden y la parte principal de los infinitésimos:

a) $f(x) = 1 - \cos\left(\sqrt{9+x} - 3\right); \quad x \to 0$

b) $g(x) = 2\,\mathrm{sen}\,x - \mathrm{sen}\,2x; \quad x \to 0$

c) $h(x) = \mathrm{Ln}\left(\mathrm{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right); \quad x \to 0$

2.4 Decir cuales de los siguientes infinitésimos son equivalentes, cuales de orden superior y cuales de orden inferior a "x" cuando $x \to 0$:

1) $2\,\mathrm{sen}\,x$ 2) $\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}\,2x;$ 3) $x - 3x^2$

4) $\sqrt{2x+\sqrt{x}}$ 5) $\mathrm{Ln}(1+x)$ 6) $x^3 + 3x^4$

2.5 Las funciones reales definidas por

$$f(x)=\sqrt[3]{\ln(x^3-3x^2+3x)}$$
$$g(x)=a\left(\sqrt{3+x^2}-2\right) \text{ con } a\neq 0$$

son infinitésimos cuando $x\to 1$.

a) Determinar el orden infinitesimal de f respecto de g cuando $x\to 1$.

b) Estudiar si existe un valor de a para el que f y g sean infinitésimos equivalentes cuando $x\to 1$.

2.6 Indicar si $f(x)=e^{\operatorname{sen} x}-1$ y $g(x)=\operatorname{Ln}(1+\operatorname{tg} 3x)$ son o no infinitésimos equivalentes en $x=0$.

2.7 Calcular $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ siendo $f(x)=\begin{cases} 1+10^{-1/x} & \text{si } x\neq 0 \\ 1/2 & \text{si } x=0 \end{cases}$

2.8 Estudiar la existencia de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} e^{1/x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2-2^{1/x}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$

2.9 Utilizando infinitésimos equivalentes, comprobar el valor de los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-1}{x}=n$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{Ln}(1+x)-\text{Ln}(1-x)}{x}=2$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{Ln}(1+ax)}{\text{Ln}(1+bx)}=\dfrac{a}{b}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left[2-\cos^2 x\right]^{1/(\text{tg}\,x+\text{sen}\,x)^2}=\text{e}^{1/4}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+b\,\text{tg}\left(\dfrac{a}{x}\right)\right)^x=e^{ab}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{3\,\text{sen}^2 x}=\dfrac{1}{12\sqrt{2}}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{Ln}(2-\cos 2x)}{\text{Ln}^2(\text{sen}\,3x+1)}=\dfrac{2}{9}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{Ln}(1+x)}{3^x-1}=\dfrac{1}{\text{Ln}\,3}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{Ln}(\cos\ x)}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}=-2$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}=1$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)^2+16x^3+5x^4-3x^5}{\text{Ln}(1+16x^3)}=1$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}5\text{x}}{\text{Ln}(1+4\text{x})}=\dfrac{5}{4}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{e}^{ax}-\text{e}^{bx}}{x}=a-b$

14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{e}^{\text{sen}\,x}-1}{\text{Ln}(1+\text{tg}\,2x)}=\dfrac{1}{2}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\text{tg}\,x)^{1/x}=e$

16) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos ax)^{1/x^2}=\text{e}^{-a^2/2}$

17) $\lim\limits_{x\to\infty}x\,\text{Ln}\dfrac{x+a}{x-a}=2a$

18) $\lim\limits_{x\to 0}(1+a\,\text{tg}\,x)^{1/x}=\text{e}^a$

19) $\lim\limits_{x\to 2}\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{\text{tg}\frac{\pi x}{2}}=1$

20) $\lim\limits_{x\to 0}\text{sen}\,x\,\text{e}^{1/(1-\cos x)}=\infty$

21) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\text{tg}\,x}{1+\text{sen}\,x}\right)^{1/\text{sen}\,x}=1$

22) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x}=1$

23) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\text{tg}\,x)^{\text{tg}\,2x}=1/e$

24) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}\right)=\frac{2}{3}$ 25) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}=1$

2.10 Los psicólogos han desarrollado un modelo que predice el rendimiento en función del número de intentos en la realización de ciertos ejercicios. Uno de estos modelos da $P(n)=\frac{b+ca(n-1)}{1+c(n-1)}$, donde P es el porcentaje de aciertos tras n intentos y a, b y c son constantes que dependen de la situación concreta del aprendizaje. Hallar $\lim_{n\to\infty} P(n)$.

2.11 La federación de caza de cierto estado introduce 50 ciervos en un coto recien adquirido. Se cree que el número de ciervos crecerá siguiendo el modelo $N(t)=\frac{10(5+3t)}{1+0,04t}$, donde t es el tiempo transcurrido en años.

a) Calcular el nº de cabezas que habrá cuando hallan transcurrido 5, 10 y 25 años.

b) ¿A qué límite tiende la población cuando pase un largo periodo de tiempo?.

2.12 El departamento de medio ambiente de un cierto estado mantiene 20 elementos de una especie marina en un espacio protegido. Se cree que el número de especímenes N al cabo de t años bajo el cuidado del Gobierno será $N(t)=\frac{220}{1+10(0.83)^t}$ y que cuando haya 80 especímenes no será necesaria la supervisión del gobierno.

a) ¿Cuántos años deben pasar para que el gobierno deje la supervisión de los animales?

b) ¿Cuántos especimenes soportará el área protegida con el paso del tiempo?

2.13 Representar gráficamente las siguientes funciones con sus asíntotas

a) $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x+1)^2}$

b) $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x+5)}$

c) $f(x)=\dfrac{x^2(2x-1)}{(2x^2+1)}$