GEOMETRÍA: ESPACIO AFÍN

1.- EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Dada la ecuación de la recta $r \equiv 2x - 3y + 4 = 0$ expresarla en forma paramétrica y punto-pendiente.

2.- Dados los puntos $A(1,2)$ y $B(2,b)$, calcular el valor de b para que la recta que pasa por dichos puntos tenga de pendiente 1.

3.- Calcular la recta que pasando por el punto $A(-1,1)$ sea:

a) Paralela al eje de ordenadas

b) perpendicular al eje de ordenada

c) paralela a la recta de ecuación $r \equiv x + 2y + 1 = 0$

4.- Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas en función del parámetro m:

$$r \equiv x - 2y + 4 = 0 \qquad s \equiv mx + 8y - 4 = 0.$$

5.- Hallar la ecuación en forma implícita de la recta que pasa por el punto $(0,2,4)$ y forma con el sentido positivo de los ejes coordenados ángulos de 30º, 60º, y 90º respectivamente.

6.- Hallar la ecuación del plano que contiene al punto $(4,2,-2)$ y es perpendicular a la recta $r \equiv \frac{x}{2} = y - 1 = -\frac{z}{3}$.

7.- Calcular la posición relativa de las rectas de ecuación:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2} \qquad s \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{1}.$$

8.- Calcular la posición relativa del plano y recta de ecuaciones respectivas:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{3} \qquad \pi \equiv x - y + z - 2 = 0$$

2.- SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Las ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=\dfrac{4+2\lambda}{3} \end{cases}$. Para obtener un punto de la recta se toma, por ejemplo, $\lambda=1 \Rightarrow P(1,2)$, y el vector director de la recta es: $\vec{v}=\left(1,\dfrac{2}{3}\right)=(3,2)\Rightarrow m=\dfrac{2}{3}$. Por lo que la ecuación punto-pendiente es: $y-2=\dfrac{2}{3}(x-1)$

2.- Un vector director de la recta es $\overrightarrow{AB}=(1,b-2)$, por lo que la pendiente de dicha recta es $m=\dfrac{b-2}{1}=1\Rightarrow b=3$.

3.- a) $x=-1$; b) $y=1$; c) Una recta paralela a la dada tendrá de ecuación $x+2y+c=0$, y sustituyendo el punto dado $(-1)+2(1)+c=0\Rightarrow c=-1$, luego la recta pedida: $x+2y-1=0$.

4.- Se trata de estudiar la compatibilidad o incompatibilidad del sistema siguiente:

$\begin{cases} x-2y+4=0 \\ mx+8y-4=0 \end{cases}$. Analizando el rango de $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -4 \\ m & 8 & 4 \end{array}\right)$, matriz de coeficientes y ampliada, se tiene:

si $m\neq -4 \Rightarrow rang(M)=2=rang(M|N)\Rightarrow$ las rectas se cortan en un punto,

si $m=-4\Rightarrow rang(M)=1\neq rang(M|N)=2\Rightarrow$ las rectas son paralelas.

5.- $\dfrac{x}{\cos 30^o}=\dfrac{y-2}{\cos 60^o}=\dfrac{z-4}{\cos 90^o}\Rightarrow \dfrac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{y-2}{\frac{1}{2}}=\dfrac{z-4}{0}$.

La ecuación implícita de la recta es $\begin{cases} x=\sqrt{3}(y-2) \\ z=4 \end{cases}$

6.- Vector director del plano $\vec{v}=(2,1,-3)$, luego la ecuación del plano es $\pi\equiv 2x+y-3z+D=0$, y como $P\in\pi\Rightarrow 2(4)+2-3(-2)+D=0\Rightarrow D=-16$, por lo que el plano pedido es $\pi\equiv 2x+y-3z-16=0$.

7.- Un punto de la recta ***r*** es ***P***(1,-1,0), y un punto del recta ***s*** es ***Q***(3,0,-2), por lo que el vector $\overrightarrow{PQ}=(2,1,-2)$. Hay que analizar el rango de las siguientes matrices:

$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $(M/N) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{array}\right)$. Puesto que el ***rang***(*M*)=2=***rang***(*M/N*), las rectas en el espacio se cortan.

8.- Se escribe la recta como intersección de dos planos, es decir:

$r \equiv \begin{cases} x-2y-1=0 \\ 3y-z+2=0 \end{cases}$, y ahora se estudia la compatibilidad o incompatibilidad del sistema $\begin{cases} x-2y-1=0 \\ 3y-z+2=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$, analizando el rango de la matriz que constituye, esto es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3-L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3-\frac{1}{3}L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4/3 & 5/3 \end{array}\right).$$

Se deduce que, como ***rang***(*M*)=3=***rang***(*M/N*), el sistema es compatible determinado y la recta y el plano dados se cortan en un punto.