MATRICES Y DETERMINANTES

1.- EJERCICIOS PROPUESTOS

1.1.- Matrices

1- Indica de qué tipo son las siguientes matrices

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & -9 & 0 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

2- Escribe: a) la matriz unidad de orden 3 b) la matriz nula de 2x3

3- Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 3-2i & 7 \\ 5 & -4 & 5-3i \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2+i & 3 \end{pmatrix}$, indica si son ciertas las siguientes afirmaciones:

a) A y B son equidimensionales b) A y B son matrices reales

4- Indica cuánto tienen que valer *x* e *y* para que A y B sean iguales, siendo:

a) $A = \begin{pmatrix} x & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 3 & y & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} x & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ x & y & 2 \end{pmatrix}$

5- Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 5 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, para cada una de ellas calcula (si es posible) su opuesta, su traspuesta y la traza de la matriz.

6- Escribe una matriz simétrica y una antisimétrica de orden 3

7- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -y & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible:

a) A+B b) A+C c) A·B d)B·A e) A·C f) C·A g)2A h) -2C i) A^2 j) C^3

8- Comprueba que A+B=B+A (propiedad conmutativa de la suma de matrices) en los siguientes casos:

a) cuando $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 4\\ 2 & 3 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

b) cuando A y B son dos matrices cualesquiera (es decir, genéricas de orden ***m***×***n***):

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn}\end{pmatrix}$$

9- Comprueba que ***Traza***(A+B)=***Traza***(B+A) en los siguientes casos:

a) cuando $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$

b) cuando A y B son dos matrices cuadradas cualesquiera (es decir, genéricas de orden ***n***)

10- ¿Para qué valores de ***k*** son permutables A y B?

a) $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & k\end{pmatrix}$.

b) $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & k\end{pmatrix}$.

11- Sean $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -8\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$. Comprueba que A·B = A·C siendo B ≠ C.

12- Sea $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Encuentra el conjunto de las matrices $B_{2\times 2}$ tales que A·B = (0).

13- Comprueba si son permutables las matrices A y B en los siguientes casos:

a) cuando: $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

b) cuando A y B son dos matrices diagonales cualesquiera de orden ***n***.

14- Dada A, calcula A^2, A^3, A^4 en los casos siguientes:

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) A es una matriz diagonal cualquiera de orden *n*. ¿Cómo crees que quedaría en este caso A^n?

15- Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$:

a) Calcula A·B, $(A \cdot B)^t$, $A^t \cdot B^t$ y $B^t \cdot A^t$

b) Con los resultados anteriores, comprueba que se cumplen las propiedades de las matrices traspuestas.

16- Dada $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$:

a) Comprueba que $A+A^t$ es simétrica.

b) Comprueba que $A-A^t$ es antisimétrica.

c) Comprueba las dos propiedades anteriores para una matriz cuadrada cualquiera (es decir, genérica) de orden *n*.

1.2.- Determinantes

17- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & -3 \\ 3 & 6 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Obten de ella (sin calcular sus valores):

a) un menor de orden 4, b) dos menores de orden 3, c) 2 menores de orden 2, d) 2 menores de orden 1, e) los menores principales de todos los órdenes posibles, f) el menor asociado al elemento a_{11} y el adjunto del elemento a_{11}, g) el menor asociado al elemento a_{23} y el adjunto del elemento a_{23}, h) el menor asociado al elemento a_{44} y el adjunto del elemento a_{44}

18- Calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

19- Calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

20- Calcula el valor del siguiente determinante: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

a) desarrollando por los elementos de la 1ª fila

b) desarrollando por los elementos de la 2ª fila

c) desarrollando por los elementos de la 3ª fila

d) desarrollando por los elementos de la 4ª columna

e) desarrollando por los elementos de la 1ª columna

21- Calcula los siguientes determinantes (transformándolos previamente en otros más sencillos: triangulares)

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 \\ -1 & -4 & 4 \\ -2 & -7 & -9 \end{vmatrix}$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ c) $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

d) $|D| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & -1 & -6 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

22- Para la matriz A del ejercicio anterior, calcula:

a) $|A^5|$, b) $|2A|$, c) $|A^{-1}|$, d) el determinante de una matriz obtenida cambiando la segunda fila de A por: (2 8 -8).

23- Para las matrices B y C del ejercicio 21, calcula $|B \cdot C|$

1.3.- Cálculo del rango e inversas

24- Calcula el rango de las siguientes matrices e indica si son regulares o singulares.

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}1 & -7 & 5\\ 1 & -4 & -1\\ -2 & 8 & -3\end{pmatrix}$ d) $D=\begin{pmatrix}0 & 2 & 5\\ -2 & 0 & 7\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$

e) $E=\begin{pmatrix}5 & 0 & 3\\ 7 & 0 & 2\\ 9 & 0 & 1\end{pmatrix}$ f) $F=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 2 & 7 & 3\\ 1 & 7 & 5\end{pmatrix}$ g) $G=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2 & -1\\ -2 & -6 & 3 & 2\\ 3 & 5 & 8 & -3\end{pmatrix}$ h) $H=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\ 0 & 2 & -3\\ 0 & -4 & 7\\ -1 & 5 & -8\end{pmatrix}$

25- Calcula el valor de a para que A sea regular:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & a\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ a & 2 & 3\end{pmatrix}$

26- Calcula la inversa de las siguientes matrices:

a) $A=\begin{pmatrix}3 & -8\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ c) $(A.B)^{-1}$ d) $D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

e) $E=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2 & -1\\ -2 & -6 & 3 & 2\\ 3 & 5 & 8 & -3\end{pmatrix}$

2.- SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

2.1.- Matrices

1- a) fila b) columna c) rectangular d) cuadrada e) diagonal f) escalar

g) triangular superior h) triangular inferior

2- a) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

3- a) falso b) falso

4- a) $x=2$; $y=0$ b) es imposible que sean iguales

5- a) $-A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -7 \\ -5 & 4 & -5 \end{pmatrix}$, $A^t=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$. El concepto de traza sólo se define para matrices cuadradas.

b) $-B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, $B^t=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, *Traza* (B)=5

6- $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ es simétrica. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ es antisimétrica

7- a) $\begin{pmatrix} 2-y & x+2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ b) No es posible c) $\begin{pmatrix} -2y+3x & 4+x \\ -3y+12 & 10 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 6-2y & 8-xy \\ 9 & 4+3x \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 4+4x & 4+x & 6+2x \\ 22 & 10 & 17 \end{pmatrix}$ f) No es posible g) $\begin{pmatrix} 4 & 2x \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} -4 & -4 & -6 \\ -8 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 4+3x & 6x \\ 18 & 16+3x \end{pmatrix}$ j) No es posible

10- a) k=2

b) No hay valores de k que hagan que estas matrices conmuten.

12- $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

13- a) Sí lo son.

b) Sí lo son. Obtenemos la conclusión de que las matrices diagonales (de cualquier orden) conmutan.

14- a) $A^2=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $A^4=\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix} {a_{11}}^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {a_{22}}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & {a_{33}}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & {a_{nn}}^2 \end{pmatrix}$

$$A^3=\begin{pmatrix} a_{11}^{\ 3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{\ 3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{\ 3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a_{nn}^{\ 3} \end{pmatrix}, \quad A^4=\begin{pmatrix} a_{11}^{\ 4} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{\ 4} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{\ 4} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a_{nn}^{\ 4} \end{pmatrix}$$

$$A^n=\begin{pmatrix} a_{11}^{\ n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{\ n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{\ n} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a_{nn}^{\ n} \end{pmatrix}$$

15- a) $A.B=\begin{pmatrix} -22 & 14 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}, \quad (A.B)^t=\begin{pmatrix} -22 & -4 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}, \quad A^t.B^t=\begin{pmatrix} -20 & -22 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B^t.A^t=\begin{pmatrix} -22 & -4 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}$

b) Se observa que, efectivamente, $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$

2.2.- Determinantes

18- a) -2 b) 0

19- a) 0 (por tener dos filas iguales) b) 0 (por tener una fila de ceros)

20- |A|=-6

21- a) -15 b) 3 c) 0 d) 24

22- Aplicando propiedades de los determinantes:

a) $|A^5|=-15^5$ b) |2A|=2.2.2.(-15)=-120 c) $|A^{-1}|=\dfrac{1}{-15}$ d) -2.(-15)=30

23- Por las propiedades de los determinantes: |B·C|=|B|·|C|=3.0=0

2.3.- Cálculo del rango e inversas

24- a) 2 (regular) b) 1 (singular) c) 3 (regular) d) 2 (singular) e) 2 (singular)

f) 2 (singular) g) 4 (regular) h) 3 (la definición de regular o singular la aplicamos a matrices cuadradas)

25- a) A es regular $\forall a \neq 0$ b) A es regular $\forall a$

26- a) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $B^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

c) $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix} 3d-b & 8d-3b \\ -3c+a & -8c+3a \end{pmatrix}$ d) $D^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$