MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

1.- INTEGRAL INDEFINIDA

Dada la función f, se dice que F es su *primitiva* si $F' = f$.

Si f tiene una primitiva, entonces tiene infinitas y la diferencia entre ellas es una constante. Así, al conjunto formado por todas las primitivas de f se le denomina *integral indefinida* y se representa de la siguiente manera:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + K$$

El operador integral cumple la siguiente propiedad de linealidad:

$$\int (a \cdot f(x) + b \cdot g(x))\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx + b \cdot \int g(x)\,dx$$

El objetivo principal de este tema es calcular la integral indefinida de una función dada, es decir, hallar su primitiva. A continuación, se exponen los métodos de integración más comunes.

2.- MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

2.1.- Integrales inmediatas

Los resultados que se presentan en la siguiente tabla se deducen de manera sencilla de la lista de derivadas de las funciones elementales:

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K \ , \ \forall n \neq -1$	$\int (f(x))^n \cdot f'(x) dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + K \ , \ \forall n \neq -1$
$\int \frac{1}{x} dx = \mathrm{L}\lvert x \rvert + K$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \mathrm{L}\lvert f(x) \rvert + K$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\mathrm{L}a} + K$	$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\mathrm{L}a} + K$
$\int \sin x \ dx = -\cos x + K$	$\int f'(x) \cdot \sin(f(x))\ dx = -\cos(f(x)) + K$
$\int \cos x \ dx = \sin x + K$	$\int f'(x) \cdot \cos(f(x))\ dx = \sin(f(x)) + K$
$\int \tan x \ dx = -\mathrm{L}\lvert \cos x \rvert + K$	$\int f'(x) \cdot \tan(f(x))\ dx = -\mathrm{L}\lvert \cos(f(x)) \rvert + K$
$\int \cot x \ dx = \mathrm{L}\lvert \sin x \rvert + K$	$\int f'(x) \cdot \cot(f(x))\ dx = \mathrm{L}\lvert \sin(f(x)) \rvert + K$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + K$	$\int f'(x) \cdot \frac{1}{\cos^2(f(x))} dx = \tan(f(x)) + K$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + K$	$\int f'(x) \cdot \frac{1}{\sin^2(f(x))} dx = -\cot(f(x)) + K$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + K$	$\int f'(x) \cdot \frac{1}{1+f^2(x)} dx = \arctan(f(x)) + K$
$\int \frac{1}{\sqrt{1\text{-}x^2}} dx = \arcsin x + K$	$\int f'(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1\text{-}f^2(x)}} dx = \arcsin(f(x)) + K$
$\int \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \sqrt{ax^2+bx+c} + K$	

2.2.- Cambio de variable (principio de sustitución)

Supongamos que se desea calcular la integral $I = \int f[g(x)] \cdot g'(x)\, dx$. Se realizamos el cambio de variable $g(x) = t$, entonces $g'(x)dx = dt$, y la integral anterior se transforma en $I = \int f(t)\, dt$. Si F es una primitiva de f, entonces $I = F(t) + K = F(g(x)) + K$.

Ejemplo: Calcula $I = \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$

Para resolver esta integral se puede hacer el cambio de variable $\sin x = t$. Entonces $\cos x\, dx = dt$ e $I = \int \frac{dt}{t^3}$. Esta integral es inmediata:

$$I = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3} dt = \frac{t^{-2}}{-2} + K = -\frac{1}{2t^2} + K = -\frac{1}{2\sin^2 x} + K$$

2.3.- Integración por partes

$$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, dx$$

Esta forma de descomponer la integral tendrá efectividad práctica si la segunda integral es más sencilla que la primera.

Ejemplo: Calcula $I = \int x \cdot \mathrm{L}\left(\frac{x}{2}\right) dx$

Realizaremos la siguiente descomposición: $\begin{cases} \mathrm{L}\left(\dfrac{x}{2}\right)=u & \Rightarrow \dfrac{dx}{x}=du \\ x\,dx=dv & \Rightarrow \dfrac{x^2}{2}=v \end{cases}$

Entonces:

$$I=\int x\cdot \mathrm{L}\left(\frac{x}{2}\right)dx=\frac{x^2}{2}\cdot \mathrm{L}\left(\frac{x}{2}\right)-\int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\cdot \mathrm{L}\left(\frac{x}{2}\right)-\int \frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{2}\cdot \mathrm{L}\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x^2}{4}+K$$

2.4.- Integrales de funciones racionales

La función que hay que integrar en este caso es el cociente de dos polinomios:

$$I=\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

Supongamos que ***p*** es el grado del polinomio del numerador y ***q*** el del denominador. Pueden darse dos casos:

a) Si $p\geq q \quad \Rightarrow$ efectuaremos la división. Así, la integral inicial se descompone en suma de dos:

$$I=\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int Z(x)\,dx+\int \frac{H(x)}{Q(x)}dx$$

En el primer sumando aparece el polinomio cociente y su integral es, por tanto, inmediata. En el segundo obtenemos una nueva integral racional. El polinomio del numerador es el resto de la división y, por lo tanto, es de grado inferior al del denominador. Y esto nos lleva al segundo caso.

b) Si $p<q \quad \Rightarrow$ calcularemos las raíces del polinomio $Q(x)$ para obtener su descomposición en factores simples. Las raíces de un polinomio pueden ser reales o complejas, simples o múltiples. Supongamos, a modo de ejemplo, que tiene dos raíces reales, ***a*** simple y ***b*** de multiplicidad ***m***, y una raíz compleja, $\alpha\pm i\beta$ simple. Hay que tener en cuenta que las raíces complejas siempre aparecen en pareja, $\alpha+i\beta$ y su conjugada $\alpha-i\beta$.

Así pues, el polinomio $Q(x)$ queda definido del modo siguiente:

$$Q(x)=(x-a)\cdot(x-b)^m\cdot\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]$$

donde el factor $(x-\alpha)^2+\beta^2$ surge del desarrollo:

$$\left[x-(\alpha+i\beta)\right]\cdot\left[x-(\alpha-i\beta)\right]=\left[(x-\alpha)-i\beta\right]\cdot\left[(x-\alpha)+i\beta\right]=(x-\alpha)^2-(i\beta)^2\underset{(i^2=-1)}{=}(x-\alpha)^2+\beta^2$$

De esta manera, el cociente entre polinomios inicial se descompone como sigue:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_m}{(x-b)^m}+\frac{Cx+D}{(x-\alpha)^2+\beta^2} \qquad (1)$$

Calculamos, a continuación, la suma que aparece en el término derecho de esa igualdad. Para ello en el denominador pondremos el mínimo común múltiplo (que es el polinomio $Q(x)$) e igualaremos los numeradores de ambos lados de la igualdad para obtener los coeficientes *A*, B_1, B_2, ..., B_m, *C* y *D*. Una vez hecho esto, se puede integrar la igualdad (1). Todas las integrales que aparecen en el término de la derecha son inmediatas o casi:

- $\int \frac{dx}{x-a}=\mathrm{L}\left|x-a\right|+K$
- $\int \frac{dx}{(x-b)^m}=\int (x-b)^{-m}\,dx=\frac{(x-b)^{-m+1}}{-m+1}+K, \quad \forall m\neq 1$
- $\int \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx=\int \frac{Ax+A\alpha-A\alpha+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx=\int \frac{Ax-A\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx+\int \frac{A\alpha+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx$

El primero de estos dos sumandos tiene como solución un logaritmo, y el segundo un arco tangente:

- $\int \frac{A(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx=\frac{A}{2}\int \frac{2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx=\frac{A}{2}\mathrm{L}\left|(x-\alpha)^2+\beta^2\right|+K$
- $\int \frac{A\alpha+\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx=\frac{A\alpha+\beta}{\beta^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1}=\frac{A\alpha+\beta}{\beta}\cdot\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)+K$

A este método se le denomina ***descomposición en fracciones simples***.

Nota: Aunque este método también es aplicable cuando aparecen raíces complejas múltiples, existe otro que es más adecuado, el ***método de Hermite***. Sin embargo, consideramos que su conocimiento no corresponde a un nivel no universitario y por ello no aparece aquí expuesto.

Ejemplo: Calcula las siguientes integrales:

1.- $I=\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

$x^2+2x+5\neq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$ luego sus raíces son complejas. En realidad, ésta es casi una integral inmediata:

$$I=\int\frac{dx}{x^2+2x+5}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+4}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\frac{(x+1)^2}{4}+1}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+K$$

2.- $I=\int\frac{x-4}{x^2-8x+5}dx$

Como en el denominador aparece un polinomio de segundo grado y en el numerador de primero, trataremos de obtener en el numerador la derivada del denominador:

$$I=\int\frac{x-4}{x^2-8x+5}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-8}{x^2-8x+5}dx=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{L}\left(x^2-8x+5\right)+K$$

3.- $I=\int\frac{2x+3}{x^2-4x+6}dx$

Esta integral racional es casi inmediata. Comenzaremos por transformar el polinomio del numerador en la derivada del polinomio del denominador:

$$I=\int\frac{2x+3}{x^2-4x+6}dx=\int\frac{2x-4+4+3}{x^2-4x+6}dx=\int\frac{2x-4}{x^2-4x+6}dx+\int\frac{7}{x^2-4x+6}dx$$

El primero de estos dos sumandos es un logaritmo:

$$\int\frac{2x-4}{x^2-4x+6}dx=\mathrm{L}\left(x^2-4x+6\right)+K_1$$

Y en el segundo obtenemos un arco tangente:

$$\int\frac{7}{x^2-4x+6}dx=7\int\frac{dx}{(x-2)^2+2}=\frac{7}{2}\int\frac{dx}{\frac{(x-2)^2}{2}+1}=\frac{7}{2}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{7}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)+K_2$$

Luego, $I=\int\frac{2x+3}{x^2-4x+6}dx=\mathrm{L}\left(x^2-4x+6\right)+\frac{7\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)+K$

4.- $I=\int\frac{dx}{x^5-2x^4+2x^3-2x^2+x}$

Obtendremos la descomposición en factores del polinomio:

$$x^5-2x^4+2x^3-2x^2+x=x(x^4-2x^3+2x^2-2x+1)$$

Para hallar las raíces de la ecuación $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0$ aplicaremos Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & \lfloor 0 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \lfloor 0 \end{array}$$

Por tanto, $x^5-2x^4+2x^3-2x^2+x = x\cdot(x-1)^2\cdot(x^2+1)$.

Ahora utilizaremos el método de descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^5-2x^4+2x^3-2x^2+x} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}$$

En la suma de la derecha el mínimo común múltiplo de los denominadores es el polinomio $x^5-2x^4+2x^3-2x^2+x$ y por tanto,

$$\frac{1}{x^5-2x^4+2x^3-2x^2+x} =$$

$$= \frac{A(x-1)^2\cdot(x^2+1)+Bx(x-1)\cdot(x^2+1)+Cx\cdot(x^2+1)+(Dx+E)x(x-1)^2}{x^5-2x^4+2x^3-2x^2+x} =$$

$$= \frac{(A+B+D)x^4+(E-2D-2A-B+C)x^3+(D-2E+2A+B)x^2+(C-2A-B+E)x+A}{x^5-2x^4+2x^3-2x^2+x}$$

Comparando los numeradores, deberemos resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} A+B+D=0 \\ E-2D-2A-B+C=0 \\ D-2E+2A+B=0 \\ C-2A-B+E=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \quad A=1 \quad B=-1 \quad C=\frac{1}{2} \quad D=0 \quad E=\frac{1}{2}$$

Luego,

$$I=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1} = \mathrm{L}|x|-\mathrm{L}|x-1|-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2}\arctan x+K$$

3.- ALGUNOS OTROS EJEMPLOS

1.- Calcula $I=\int\frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}}$

Aunque es una integral irracional, podemos considerarla como inmediata:

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{(x+1)^2}{4}}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}}=\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right)+K$$

2.- Calcula $I=\int\frac{x}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$

Esta integral irracional también puede transformarse en inmediata. Para empezar, debemos obtener en el numerador la derivada del polinomio del denominador:

$$I=\int\frac{x}{\sqrt{1-x-x^2}}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{-2x}{\sqrt{1-x-x^2}}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{-2x-1+1}{\sqrt{1-x-x^2}}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{-2x-1}{\sqrt{1-x-x^2}}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$$

El primer sumando es inmediato: $-\frac{1}{2}\int\frac{-2x-1}{\sqrt{1-x-x^2}}dx=-\sqrt{1-x-x^2}+K_1$

En el segundo, como en el ejemplo anterior, obtenemos la función arco seno:

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{4}-\frac{(2x+1)^2}{4}}}=-\int\frac{dx}{\sqrt{5-(2x+1)^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)^2}}=-\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)+K_2$$

Por tanto, $I=\int\frac{x}{\sqrt{1-x-x^2}}dx=-\sqrt{1-x-x^2}-\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)+K$

3.- A la expresión formada por funciones trigonométricas se la denomina *integral trigonométrica*. Aunque en algunos casos hará falta un cambio de variable especial, en general estas integrales se pueden resolver haciendo uso de las propiedades básicas de las funciones trigonométricas. Veamos los siguientes ejemplos:

- $I=\int\sin^2 x\cdot\cos^3 x\,dx$

Hagamos el siguiente cambio de variable: $\sin x=t \quad\Rightarrow\quad \cos x\,dx=dt$

Entonces: $I=\int\sin^2 x\cdot\cos^3 x\,dx=\int\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\cos x\,dx=\int t^2\cdot(1-t^2)\,dt=$

$$= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + K = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + K$$

- $I = \int \tan^3 x \, dx$

Basta con tener en cuenta las siguientes fórmulas:

$$\begin{cases} \tan^2 x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 \\ (\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \end{cases}$$

Así,

$$I = \int \tan^3 x \, dx = \int \tan^2 x \cdot \tan x \, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \cdot \tan x \, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \tan x \, dx - \int \tan x \, dx$$

Hemos obtenido integrales inmediatas en ambos sumandos.

En el primero:

$$\tan x = t \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \tan x \, dx = \int t \, dt = \frac{t^2}{2} + K_1 = \frac{(\tan x)^2}{2} + K_1$$

Y en el segundo:

$$\int \tan x \, dx = -\mathrm{L} \left| \cos x \right| + K_2$$

Entonces, $I = \int \tan^3 x \, dx = \dfrac{\tan^2 x}{2} - \mathrm{L} \left| \cos x \right| + K$

4.- INTEGRAL DEFINIDA

Sea f una función acotada en un intervalo cerrado $[a,b]$. A la expresión $\int_a^b f(x) \, dx$ se le denomina *integral definida de f*. Aquí no se expondrá la definición formal de esta integral; por el contrario, nos centraremos en dos aspectos más prácticos relacionados con ella:

- Cómo se calcula una integral definida.
- Para qué puede servir una integral definida.

4.1.- Regla de Barrow

Sea f una función continua en un intervalo $[a,b]$. Si F es una primitiva de f entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Usualmente escribiremos $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Según esta fórmula, el cálculo de una integral definida consta de dos pasos:

1.- Obtener la primitiva (a eso nos hemos dedicado en los apartados anteriores)

2.- Evaluar esa primitiva en los puntos a y b.

Ejemplo: Calcula $\int_1^4 x^2\,dx$

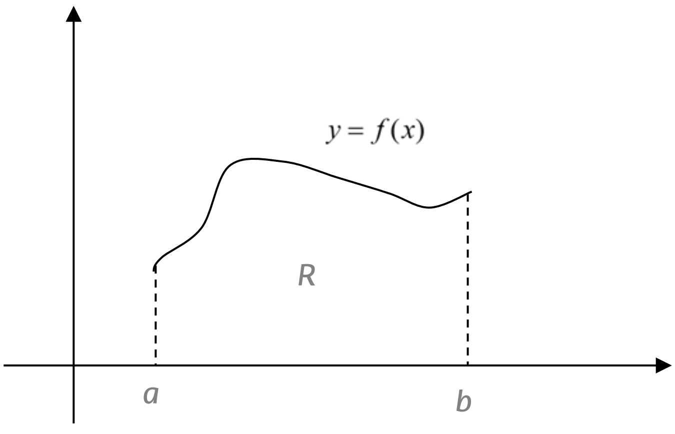
Como ya sabemos, $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + K$. Por lo tanto, $\int_1^4 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{3^3}{3} = \frac{37}{3}$

4.2.- Cálculo del área de una región plana

Aunque la integral definida tiene varias aplicaciones, aquí nos ocuparemos de la más importante, el cálculo de áreas.

Consideremos la región del plano limitada por una función continua $y = f(x) \geq 0$ y el eje OX, entre las rectas $x = a$ y $x = b$. Es decir:

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\right\}$$



Entonces, $\acute{A}rea(R) = \int_a^b f(x)\,dx$

Si $y = f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ entonces, $\acute{A}rea(R) = \int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

Y, en general, si $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, a\le x\le b,\ f(x)\le y\le g(x)\right\}$, entonces:

$$Área(R)=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx$$

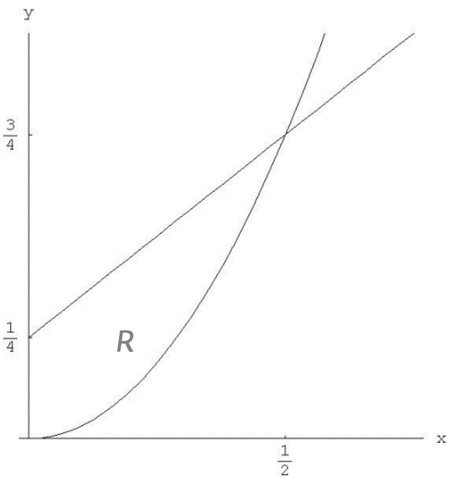
<u>Ejemplo</u>: Calcular el área de la región del plano limitada por la recta $y=x+\frac{1}{4}$ y la curva $y=3x^2$ en el primer cuadrante.

Calculamos los puntos de intersección de $y=3x^2$ e $y=x+\frac{1}{4}$:

$$3x^2=x+\frac{1}{4}\quad\Leftrightarrow\quad 3x^2-x-\frac{1}{4}=0\quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{1\pm\sqrt{1+3}}{6}=\begin{cases}\frac{1}{2}\\[4pt] -\frac{1}{6}\end{cases}$$

Como se trata de una región definida en el primer cuadrante, de las dos soluciones anteriores sólo vale la positiva. En cuanto a la posición relativa de curva y recta, como $3x^2-x-\frac{1}{4}=3\left(x+\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)<0\quad\forall x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, se deduce que la curva $y=3x^2$ está por debajo de la recta $y=x+\frac{1}{4}$. Así, tenemos la siguiente región:

$$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 0\le x\le\frac{1}{2},\ 3x^2\le y\le x+\frac{1}{4}\right\}$$



Luego, $Área(R)=\int_0^{1/2}\left[x+\frac{1}{4}-3x^2\right]dx=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}-x^3\right]_0^{1/2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$